INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIX. BAND FÜNFTES HEFT 1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 22. September 1960

Postverlagsort Berlin *Preis DM 12,—*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Mettler, E., und *F. Weidenhammer*, Kinetisches Durchschlagen des schwach gekrümmten Stabes. Mit 3 Abbildungen 301

Lehmann, Th., Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik 316

Tremmel, E., Ausweitung des kreiszylindrischen Hohlraumes unter örtlichem Innendruck. Mit 4 Abbildungen 331

Richter, W., Berechnung der Druckverteilung von ebenen Schaufelgittern mit stark gewölbten dicken Profilen bei inkompressibler Strömung. Mit 14 Abbildungen . 351

INGENIEUR-ARCHIV

XXIX. BAND FÜNFTES HEFT 1960

Kinetisches Durchschlagen des schwach gekrümmten Stabes

Von **E. Mettler** und **F. Weidenhammer**

Herrn K. von Sanden zum 75. Geburtstag gewidmet

1. Fragestellung. Zwischen den Stabilitätsproblemen der Elastostatik und der Elastokinetik besteht eine enge Analogie. In der Statik ist es bekanntlich möglich, daß ein „dünner" elastischer Körper (Stab, Platte, Schale usw.) einer statischen Last von bestimmter Höhe, die ein indifferentes Gleichgewicht bezeichnet, auszuweichen beginnt und bei weiterer Steigerung der Last die alte, instabil gewordene Lage verläßt, um eine neue, „überkritische" Gleichgewichtslage einzunehmen. Es entsteht dann also Mehrdeutigkeit des Gleichgewichts. Man unterscheidet zwei Typen von solchen Ausweichproblemen[1], nämlich Verzweigungsprobleme und Durchschlagprobleme. Diese Phänomene erhält man allerdings nur, wenn man die streng linearisierte Elastizitätstheorie verläßt und nichtlineare Glieder berücksichtigt. Die entsprechenden Stabilitätsprobleme der Elastokinetik entstehen einfach dadurch, daß man an die Stelle der statischen Lasten zeitlich veränderliche Lasten setzt. Dabei beschränkte man sich bisher ganz überwiegend auf harmonisch pulsierende Lasten. Statt mit statischen Gleichgewichtslagen hat man es jetzt mit erzwungenen Schwingungen des elastischen Körpers zu tun. Indifferenzpunkte und überkritische Zustände treten analog zu den statischen Erscheinungen auf, wobei natürlich die Verhältnisse komplizierter werden, weil die Zeit als weitere Variable hinzutritt. Insbesondere spielen die überkritischen Zustände als nichtlineare Schwingungen im kinetischen Fall eine größere Rolle als in der Statik.

Kinetische Verzweigungsprobleme findet man in der Literatur in weitem Umfang behandelt; man denke nur an das wohlbekannte Beispiel des axial pulsierend belasteten Stabes, der das Analogon zum *Euler*schen Knickstab bildet. Das kinetische Durchschlagproblem ist daneben nur wenig bearbeitet worden. Vor kurzem hat der eine von uns[2] auf die in Rede stehende Analogie der Stabilitätsprobleme allgemein hingewiesen, konnte aber das Durchschlagproblem nur am Beispiel des schwach gekrümmten Stabes mit einer sehr speziellen Belastung, nämlich einer sinusförmig verteilten Streckenlast, behandeln. Es dürfte deshalb von Interesse sein, dieses Problem erneut aufzugreifen und für allgemeinere, in der Praxis vorkommende Belastungen zu lösen.

2. Ausgangsgleichungen. Wir betrachten einen an beiden Enden in festen Gelenken gelagerten Stab nach Abb. 1 mit der kleinen spannungslosen und zeitlich konstanten Vorausbiegung $W(x)$

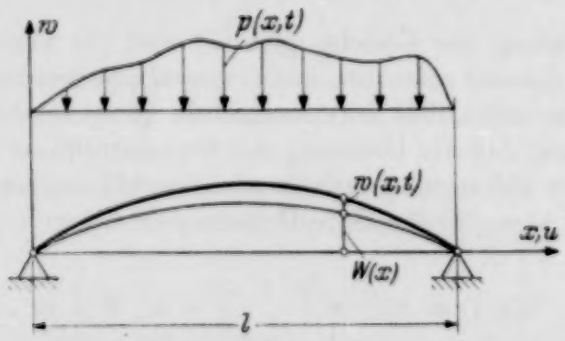

Abb. 1. Der Stab im Koordinatensystem.
Die Streckenlast $p(x,t)$ ist der Deutlichkeit halber nach oben verschoben gezeichnet.

und der zusätzlichen, von der Zeit t abhängigen kinetischen Querverschiebung $w(x, t)$. Die Längsverschiebung sei $u(x, t)$. Der Stab trage die orts- und zeitabhängige Querlast je Längeneinheit

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik Band 1, S. 562, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

[2] *E. Mettler*, IX[e] Congr. Intern. de Mec. appl., Actes t. V., p. 5, Bruxelles 1957.

$p(x, t)$ (Abb. 1). Seine Bewegungsgleichungen und Endbedingungen lassen sich zweckmäßig aus dem Prinzip von *Hamilton*

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V_i - V_a)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta A\, dt = 0 \tag{1}$$

herleiten. Darin bezeichnet V_i die potentielle Energie der Formänderung, V_a das Potential der äußeren Belastung, T die Bewegungsenergie und δA die virtuelle Arbeit der Dämpfungskraft. Die Formänderungsenergie berechnet sich nach *K. Marguerre*[1] und *R. Kappus*[2] in einer Näherung, welche die ersten nichtlinearen Glieder berücksichtigt, mit Hilfe des Ausdruckes für die Dehnung der Stabachse

$$\tilde{\varepsilon} = u_x + \frac{w_x^2}{2} + w_x W_x \tag{2}$$

zu

$$V_i = \frac{E F}{2} \int_0^l \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + w_x W_x\right)^2 dx + \frac{E J}{2} \int_0^l w_{xx}^2\, dx\,. \tag{3}$$

Für die weiteren Energieanteile hat man in (1) die aus der Schwingungslehre geläufigen Ausdrücke

$$V_a = + \int_0^l p(x, t)\, w\, dx\,, \qquad T = \frac{\mu}{2} \int_0^l (u_t^2 + w_t^2)\, dx\,, \qquad \delta A = - \int_0^l \beta\, w_t\, \delta w\, dx \tag{4}$$

einzusetzen. Die Arbeit der als geschwindigkeitsproportional vorausgesetzten Dämpfungskräfte wird nur bei der wesentlich interessierenden Querverschiebung $w(x, t)$ berücksichtigt. In (3) und (4) bezeichnen J das für Biegeschwingungen maßgebende, konstante Flächenträgheitsmoment, F die konstante Querschnittsfläche des Stabes, μ die Stabmasse je Längeneinheit, l die Stablänge, E den Elastizitätsmodul und β die Dämpfungskonstante der Biegeschwingungen.

Durch Ausführung der Variationen im *Hamilton*schen Prinzip (1) ergeben sich die in der Längsverschiebung u und der Querverschiebung w gekoppelten, nichtlinearen und inhomogenen partiellen Differentialgleichungen

$$E F \left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + w_x W_x\right)_x - \mu\, u_{tt} = 0\,, \tag{5}$$

$$E J\, w_{xxxx} - E F \left[\left(u_x + \frac{w_x^2}{2} + w_x W_x\right)(w_x + W_x)\right]_x + \mu\, w_{tt} + \beta\, w_t = - p(x, t) \tag{6}$$

zur Beschreibung der Stabbewegung. Hierzu treten noch die Endbedingungen für den beidseitig quer- und längsunverschieblich und momentenfrei gelagerten Stab, nämlich

$$u(0, t) = u(l, t) = 0\,, \tag{5'}$$

$$w(0, t) = w(l, t) = w_{xx}(0, t) = w_{xx}(l, t) = 0\,. \tag{6'}$$

Zur näherungsweisen Lösung der Gleichungen (5) und (6) verwendet man zweckmäßig die *Kirchhoff*sche Annahme[3], da diese es gestattet, aus dem gekoppelten System (5) und (6) eine Integrodifferentialgleichung für die wesentlich interessierende Querverschiebung w allein herzuleiten. Nimmt man zu dem Zweck an, daß die Dehnung der Stabmittelfaser (2) nicht von der Ortskoordinate x und nur von der Zeit abhängt, so erhält man nach Integration über die Stablänge l bei Beachtung der Randbedingungen (5′) für diese Dehnung genähert

$$\tilde{\varepsilon}(x, t) \approx \tilde{\varepsilon}(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{w_x^2}{2} + w_x W_x\right) dx\,. \tag{7}$$

Wie man aus (5) abliest, ist diese Näherung immer dann berechtigt, wenn die von den Querschwingungen geweckten Längsschwingungen nur Trägheitskräfte vernachlässigbarer Größe besitzen. Dies dürfte schon für technische Stäbe mittlerer Schlankheit stets zutreffen.

---

[1] *K. Marguerre*, Jahrb. 1938 der Deutsch. Luftf.-Forsch. S. I 433.
[2] *R. Kappus*, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 350.
[3] Vgl. *G. Kirchhoff*, Vorles. über math. Physik, 4. Aufl., Bd. 1, S. 444, Leipzig 1897.

Mit der durch (7) ersetzten Dehnung (2) geht (6) in die Integrodifferentialgleichung

$$E J w_{xxxx} - \frac{E F}{l} \int_0^l \left(w_x W_x + \frac{w_x^2}{2} \right) dx \cdot (W_{xx} + w_{xx}) + \beta w_t + \mu w_{tt} = - p(x, t) \tag{8}$$

über, aus welcher sich die Querverschiebung unabhängig von der Längsbewegung näherungsweise berechnen läßt. Die anfängliche Vorausbiegung des schwach gekrümmten Stabes wird im weiteren stets als sinusförmig angenommen, so daß sich die Lage der Stabmittelfaser durch

$$W(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l} \tag{9}$$

beschreiben läßt und w_0 die größte Abweichung von der die Lager verbindenden Geraden bezeichnet.

Die Querbelastung des Stabes kann sich in beliebiger Weise über den Stab verteilen. Doch werde die Zeitabhängigkeit der schwingenden Lasten stets als rein harmonisch vorausgesetzt, so daß man für $p(x, t)$ mit der Kreisfrequenz ω einfacher

$$p(x, t) = p_0(x) \cos \omega t \tag{10}$$

schreiben kann.

3. Rückführung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. a) Reihenansatz für die Lösung. Die nichtlineare Integrodifferentialgleichung (8) läßt sich für spezielle Schwingungsformen streng auf eine gewöhnliche Schwingungsgleichung zurückführen, wenn keine äußere Belastung vorhanden ist ($p(x, t) \equiv 0$). In diesem Falle befriedigen die Produktansätze $\sin (j \pi x/l) \cdot T_j(t)$ die vier Randbedingungen (6) und reduzieren außerdem (8) auf nichtlineare Einzeldifferentialgleichungen zur Bestimmung der Zeitfunktionen T_j. Es liegt daher nahe, eine allgemeine Lösung der vollständigen Gleichung (8) dadurch zu versuchen, daß man zunächst die Belastungsverteilung $p_0(x)$ nach den Funktionen $\sin(j \pi x/l)$ entwickelt und dann für $w(x, t)$ zu einem Summenansatz von der Form

$$w(x, t) = w_m \sum_{j=1}^{\infty} \sin j \frac{\pi x}{l} \cdot T_j(t) \tag{11}$$

übergeht. In diesem Ansatz bedeutet w_m einen Vorfaktor mit der Dimension der Länge, der bis auf kleine Größen höherer Ordnung die größte vorkommende Querauslenkung der erzwungenen Schwingungen bezeichnet. Dieser Faktor ist also geeignet, die Größenordnungen der vorkommenden Nichtlinearitäten erkennbar zu machen[1]. Die Ortsfunktionen erfüllen sämtlich die Randbedingungen, so daß die Bestimmung der Zeitfunktionen aus einem gekoppelten System nichtlinearer, jedoch gewöhnlicher Differentialgleichungen die verbleibende Hauptaufgabe ist. Um diese Differentialgleichungen aufzustellen, entwickeln wir auch die Belastung

$$p_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \sin j \frac{\pi x}{l} \tag{12}$$

und tragen dann die Entwicklungen (11) und (12) in (8) ein. Da die Vorfaktoren der $\sin(j \pi x/l)$ für jedes j einzeln verschwinden müssen, wird man so auf ein Differentialgleichungssystem für die Zeitfunktionen T_j geführt.

Um das System in einer für die weitere Rechnung geeigneten Form zu erhalten, führen wir mit der Kreisfrequenz ω der schwingenden Belastung eine dimensionslose Zeitzählung

$$\tau = \omega t \tag{13}$$

ein. Dabei wird auch die im weiteren sehr wesentliche Erregerfrequenz ω zweckmäßig in einem dimensionslosen Maße $\varkappa$ gemessen, wobei die Bezugnahme auf den Dimensionsfaktor $\sqrt{E J/\mu l^4}$ der Biegeeigenschwingungen des Stabes naheliegt. Dann erhält man für die Erregerkreisfrequenz

$$\varkappa = \frac{\omega}{\sqrt{E J/\mu l^4}} \tag{14}$$

[1] Zur Einführung und Verwendung des Faktors w_m vgl. *R. Grammel*, Publ. sci. techn. Min. Air. Paris 281 (1953), S. 49.

und für die Eigenkreisfrequenzen der Biegeschwingungen des Stabes

$$\varkappa_j = \frac{\omega_j}{\sqrt{E\,J/\mu\,l^4}} \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

so daß sich die Frequenzverhältnisse

$$q_j = \frac{\omega}{\omega_j} = \frac{\varkappa}{\varkappa_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

als Quotienten zweier reiner Zahlen berechnen lassen. Auch die Dämpfungskonstante β läßt sich mit dem logarithmischen Dämpfungsdekrement und bei Bezugnahme auf die Eigenfrequenzen dimensionslos messen. Berechnet man das logarithmische Dekrement ϑ_j jeweils mit der Eigenkreisfrequenz ω_j, so findet man für die in der Technik vorkommenden kleinen Dämpfungen

$$\frac{\beta}{\omega_j\,\mu} \approx \frac{\vartheta_j}{\pi} = d_j \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

so daß auch die Dämpfungskräfte in dimensionsloser Form in die Gleichungen eingehen. Da die Entwicklungsbeiwerte η_j von (12) von der jeweiligen Form der Belastung abhängen, nehmen wir diese Koeffizienten allgemein in die Rechnung auf und geben sie erst im Abschnitt 2b) für zwei interessante Fälle explizit an.

Mit den Abkürzungen (13) bis (16) erhält man nun nach formaler Rechnung mit den Entwicklungen (11) und (12) aus (8) das unendliche Differentialgleichungssystem

$$q_j^2\,T_j'' + d_j\,q_j\,T_j' + T_j + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta_{lk,j}\,T_l\,T_k + T_j\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_{jk}\,T_k^2 = -\,r_j\cos\tau \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

Hierin sind die Faktoren der nichtlinearen Glieder durch

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{lk,1} &= \frac{w_0\,w_m}{i_F^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2\right)}\left(\frac{k^2}{4}\,e_{lk} + \frac{e_{1l}\,e_{1k}}{2}\right), \qquad \zeta_{lk,j} = \frac{w_0\,w_m}{i_F^2}\,\frac{e_{1l}\,e_{jk}}{2\,j^2}, \\ \gamma_{1k} &= \frac{w_m^2}{i_F^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2\right)}\,\frac{k^2}{4}, \qquad \gamma_{jk} = \frac{w_m^2}{i_F^2}\,\frac{k^2}{4\,j^2} \qquad (j = 2, 3, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

gegeben, wobei mehrfach zur Abkürzung das *Kronecker*symbol

$$e_{lk} = 0 \text{ für } l \neq k \text{ und } e_{lk} = 1 \text{ für } l = k$$

verwendet wurde. Die Größenordnungen der $\zeta_{lk,j}$, γ_{jk} und damit der Nichtlinearitäten sind durch die Verhältnisse der Vorauslenkung w_0 und der zusätzlichen Maximalamplitude w_m zum Flächenträgheitsradius i_F bestimmt. Auch die Vorfaktoren der inhomogenen Glieder lassen sich durch Bezugnahme auf die *Euler*sche Knicklast $P_E = \pi^2\,E\,J/l^2$ in der dimensionslosen Form

$$r_1 = \frac{1}{\pi^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2\right)}\,\frac{\eta_1\,l^2}{P_E\,w_m}, \qquad r_j = \frac{1}{\pi^2\,j^4}\,\frac{\eta_j\,l^2}{P_E\,w_m} \qquad (j = 2, 3, \ldots) \tag{19}$$

schreiben. Die Frequenzverhältnisse q_j in (15) sind mit den dimensionslos gemessenen Eigenkreisfrequenzen

$$\varkappa_1 = \pi^2\sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2}, \qquad \varkappa_j = j^2\,\pi^2 \qquad (j = 2, 3, \ldots)$$

zu bilden. Offenbar wird nur $\varkappa_1$ und damit nur die erste Biegeeigenfrequenz von der Vorkrümmung des Stabes beeinflußt, was in der speziellen Wahl der Vorverformung (9) begründet liegt.

b) Entwicklung der Belastungsfunktion. Von den schwingenden Querbelastungen $p(x, t)$ eines Stabes beanspruchen zwei Formen besonderes Interesse.

Zunächst ist dies der einfache Fall, bei welchem die Entwicklung (12) der Lastverteilung sich auf ein einziges Glied reduziert:

$$p_0(x) = \eta_j \sin j\,\frac{\pi\,x}{l}.$$

Diese Lastannahme, die schon am Schluß von Abschnitt 1 erwähnt wurde, hat große rechnerische Vereinfachungen zur Folge und besitzt vorerst mehr theoretische als praktische Bedeutung. Doch wird sich später zeigen, daß die mit dieser einfachsten Annahme gefundenen Ergebnisse auch in allgemeineren Fällen fast ungeändert bestehen bleiben.

Die in der Technik häufigste Belastung dürfte wohl durch pulsierende Einzellasten gegeben sein. Die Entwicklung (12) einer solchen Einzellast läßt sich in bekannter Weise durch Grenzübergang aus einer gleichförmig über ein kleines Streckenintervall verteilten Belastung gewinnen[1]. Für eine im Abstand x_0 vom linken Auflager wirkende Last vom Betfag P ergeben sich die Entwicklungskoeffizienten

$$\eta_j = \frac{2\,P}{l} \sin j \frac{\pi\, x_0}{l}$$

und daraus die in (17) benötigten Koeffizienten

$$r_1 = \frac{1}{\pi^2 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2\right)} \frac{2\,P\,l}{P_E\, w_m} \sin \frac{\pi\, x_0}{l}, \qquad r_j = \frac{1}{\pi^2\, j^4} \frac{2\,P\,l}{P_E\, w_m} \sin j \frac{\pi\, x_0}{l} \qquad (j = 2, 3, \ldots)\,. \tag{20}$$

Für den Spezialfall einer in Stabmitte ($x_0 = l/2$) angreifenden Last verschwinden offenbar alle Koeffizienten mit geradzahligen Werten von j. Dies hat ersichtlich seine Ursache in der Tatsache, daß die Ausschlagfunktionen $\sin j\,\pi\, x/l$ für gerades j in Stabmitte einen Knoten haben und daher die zugehörigen Teilschwingungen durch diesen speziellen Kraftangriff nicht erregt werden können.

4. Berechnung der erzwungenen Schwingungen. Durch das System (17) werden erzwungene Schwingungen beschrieben, deren näherungsweise Berechnung im weiteren die Hauptaufgabe ist. Zu dem Zweck wollen wir von dem unendlichen System die ersten vier Gleichungen verwenden, was sicherlich genau genug ist, und außerdem müssen gewisse Kleinheitsvoraussetzungen eingeführt werden. So soll die Rechnung auf Schwingungsamplituden w_m beschränkt werden, die wesentlich kleiner als der für die Biegeschwingungen maßgebende Flächenträgheitsradius sind. Dann bleiben die in (17) vorkommenden Nichtlinearitäten stets klein, wie man aus den Vorfaktoren (18) erkennt. Für die Zwecke der formalen Rechnung wird vorübergehend ein kleiner Parameter ε mit den folgenden Abkürzungen eingeführt, aus denen man die Größenordnung der Koeffizienten (18) abliest:

$$\gamma_0\, \varepsilon = \frac{w_0\, w_m}{i_F^2}, \qquad \varepsilon = \frac{w_m}{i_F}, \tag{21}$$

$$\Gamma_0\, \varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2} \frac{w_0\, w_m}{i_F^2}, \qquad \Gamma\, \varepsilon^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2} \frac{w_m^2}{i_F^2}. \tag{22}$$

Die Erregeramplituden r_j werden allgemein, aber ebenfalls klein von der Größenordnung ε angenommen, so daß für die Rechnung

$$r_j = \bar{r}_j\, \varepsilon \tag{23}$$

geschrieben werden kann. Da die Dämpfungskräfte im wesentlichen von der Werkstoffdämpfung herrühren, sind die zugehörigen Dekremente klein, was durch die Schreibweise

$$d_j = \bar{d}_j\, \varepsilon \tag{24}$$

zum Ausdruck gebracht werden soll. Die ersten vier Gleichungen des Systems (17) lauten dann

$$q_1^2\, T_1'' + \bar{d}_1\, \varepsilon\, q_1\, T_1' + T_1 + \Gamma_0 \varepsilon \left(\frac{3}{4} T_1^2 + T_2^2 + \frac{9}{4} T_3^2 + 4\, T_4^2\right) + \Gamma\, \varepsilon^2 \left(\frac{1}{4} T_1^3 + T_2^2\, T_1 + \frac{9}{4} T_3^2\, T_1 + 4\, T_4^2\, T_1\right) = -\,\bar{r}_1\, \varepsilon \cos \tau\,, \tag{25.1}$$

$$q_2^2\, T_2'' + \bar{d}_2\, \varepsilon\, q_2\, T_2' + T_2 + \frac{1}{8}\gamma_0 \varepsilon\, T_1\, T_2 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{16} T_1^2\, T_2 + \frac{1}{4} T_2^3 + \frac{9}{16} T_3^2\, T_2 + T_4^2\, T_2\right) = -\,\bar{r}_2\, \varepsilon \cos \tau\,, \tag{25.2}$$

$$q_3^2\, T_3'' + \bar{d}_3\, \varepsilon\, q_3\, T_3' + T_3 + \frac{1}{18}\gamma_0 \varepsilon\, T_1\, T_3 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{36} T_1^2\, T_3 + \frac{1}{9} T_2^2\, T_3 + \frac{1}{4} T_3^3 + \frac{4}{9} T_4^2\, T_3\right) = -\,\bar{r}_3\, \varepsilon \cos \tau\,, \tag{25.3}$$

$$q_4^2\, T_4'' + \bar{d}_4\, \varepsilon\, q_4\, T_4' + T_4 + \frac{1}{32}\gamma_0 \varepsilon\, T_1\, T_4 + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{64} T_1^2\, T_4 + \frac{1}{16} T_2^2\, T_4 + \frac{9}{16} T_3^2\, T_4 + \frac{1}{4} T_4^3\right) = -\,\bar{r}_4\, \varepsilon \cos \tau\,. \tag{25.4}$$

[1] Vgl. z. B. *J. Szábó*, Höhere Technische Mechanik, S. 118, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

Diese Differentialgleichungen sollen zur Gewinnung einer Näherungslösung mittels der Störungsrechnung ausgewertet werden. Zu dem Zweck entwickeln wir die gesuchten Zeitfunktionen $T_j(t)$ nach dem kleinen Parameter ε und setzen

$$T_j = \overset{(0)}{T}_j + \overset{(1)}{T}_j \varepsilon + \overset{(2)}{T}_j \varepsilon^2 + \cdots \qquad (j = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{26}$$

Um die für nichtlineare Schwingungen charakteristische Frequenz-Amplituden-Abhängigkeit aufzudecken, müssen wir auch die Erregerfrequenz $\varkappa$ in der Nähe einer vorgegebenen, festen Frequenz entwickeln. Dabei ist es zweckmäßig, die Quadrate der Frequenzverhältnisse q_j unmittelbar zu entwickeln. Soll z. B. eine Erregerfrequenz $\varkappa$ in der Nähe einer festen Eigenfrequenz $\varkappa_i$ betrachtet werden, so schreiben wir

$$\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_i}\right)^2 = q_i^2 = 1 + \overset{(1)}{q}_i \varepsilon + \overset{(2)}{q}_i \varepsilon^2 + \cdots, \tag{27.i}$$

während für die übrigen Quadrate der Frequenzverhältnisse dann

$$\left(\frac{\varkappa}{\varkappa_j}\right)^2 = q_j^2 = \left(\frac{\varkappa_i}{\varkappa_j}\right)^2 q_i^2(\varepsilon) = \left(\frac{\varkappa_i}{\varkappa_j}\right)^2 + \overset{(1)}{q}_j \varepsilon + \overset{(2)}{q}_j \varepsilon^2 + \cdots \qquad (j \neq i) \tag{27.j}$$

gesetzt werden muß. In der weiteren Rechnung kann nur über die $\overset{(n)}{q}_i$ geeignet verfügt werden, während die $\overset{(n)}{q}_j$ $(j \neq i)$ dann durch (27.j) davon abhängig zwangläufig gegeben sind.

Bei der Berechnung der erzwungenen Schwingungen bieten zwei Erregerfrequenzbereiche besonderes Interesse. Dies ist zunächst natürlich der Frequenzbereich in der Nähe der tiefsten Eigenfrequenz. Die zugehörige Schwingungsgleichung (25.1) mit $\bar{r}_1 \neq 0$ nimmt außerdem deswegen eine bevorzugte Stellung ein, weil die Vorverformung des Stabes hierin von besonders großem Einfluß ist. Der nächsthöhere Eigenfrequenzbereich, der nicht durch die Art der Vorverformung bevorzugt ist, ist der Bereich in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz, und diese soll daher als repräsentativ für eine nicht ausgezeichnete Erregerfrequenz ebenfalls betrachtet werden. Dabei suchen wir solche erzwungenen Schwingungen auf, welche die gleiche Periode $\tau = 2\pi$ wie die erregende Kraft haben. Andere Werte der Erregerfrequenz sowie Schwingungen mit anderen Perioden (subharmonische Schwingungen, mit deren Vorkommen man grundsätzlich rechnen muß,) sollen in dieser Arbeit ausdrücklich beiseite gelassen werden. Da bei den folgenden Rechnungen wesentlich die Frequenz-Amplituden-Beziehungen interessieren, soll zur Vereinfachung die Dämpfung vernachlässigt werden. Bei einem später notwendig werdenden Stabilitätsnachweis muß die Dämpfung allerdings in die Rechnung aufgenommen werden.

a) Erregerfrequenz in der Nähe der ersten Eigenfrequenz. Trägt man die Entwicklungen (26), (27.i) und (27.j) in die nichtlinearen Differentialgleichungen (25, 1—4) ein und ordnet nach Potenzen des Parameters ε, so erhält man für jede Potenz von ε jeweils vier inhomogene lineare Differentialgleichungen, aus denen die mit den Störgliedern gleichperiodischen Lösungen rekursibel zu berechnen sind.

Für die von ε freien Glieder erhält man in dem jetzt betrachteten Fall, daß die Erregerfrequenz in der Nähe der ersten Eigenfrequenz liegen soll $(i = 1)$, die Differentialgleichungen

$$\overset{(0)}{T}_1'' + \overset{(0)}{T}_1 = 0\,, \qquad \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_j}\right)^2 \overset{(0)}{T}_j'' + \overset{(0)}{T}_j = 0 \qquad (j = 2, 3, \ldots)\,, \tag{28}$$

deren periodische Lösungen der Periode 2π aufzusuchen sind. Als periodische Lösung der ersten Gleichung (28) hat nur

$$\overset{(0)}{T}_1 = \cos\tau \tag{29.1}$$

Interesse, da ja insgesamt erzwungene Schwingungen berechnet werden sollen und die Erregerglieder in (26, 1—4) das gleiche Zeitverhalten wie (29.1) aufweisen. Man überzeugt sich leicht, daß die formal gleichfalls mögliche Ausgangsfunktion $\overset{(0)}{T}_1 = \sin\tau$ im folgenden Rechnungsgang zu keiner periodischen Lösung führen würde. Die verbleibenden Gleichungen (28) lassen als periodische Lösungen der verlangten Art nur

$$\overset{(0)}{T}_j \equiv 0 \qquad (j = 2, 3, 4) \tag{29.j}$$

zu.

Weiter findet man nun für die Glieder erster Ordnung in ε die inhomogenen Differentialgleichungen

$$\overset{(1)}{T}_1'' + \overset{(1)}{T}_1 = -\frac{3}{4}\,\Gamma_0\,\overset{(0)}{T}_1^2 - \bar{r}_1\cos\tau - \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(0)}{T}_1'', \tag{30.1}$$

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_j}\right)^2 \overset{(1)}{T}_j'' + \overset{(1)}{T}_j = -\bar{r}_j\cos\tau \qquad (j = 2, 3, 4), \tag{30.j}$$

wenn man (29.j) beachtet. Durch Einsetzen von (29.1) in (30.1) kommt

$$\overset{(1)}{T}_1'' + \overset{(1)}{T}_1 = -\frac{3}{8}\,\Gamma_0 + \left(-\bar{r}_1 + \overset{(1)}{q}_1\right)\cos\tau - \frac{3}{8}\,\Gamma_0\cos 2\tau,$$

wovon wiederum eine periodische Lösung aufzusuchen ist. Es muß also über den Entwicklungskoeffizienten $\overset{(1)}{q}_1$ so verfügt werden, daß das Resonanzglied mit $\cos\tau$ verschwindet, da dieses in die Lösung $\overset{(1)}{T}_1$ nichtperiodische Bestandteile hineintragen würde. Man erhält daher

$$\overset{(1)}{q}_1 = \bar{r}_1 \tag{31}$$

und als Lösung

$$\overset{(1)}{T}_1 = -\frac{3}{8}\,\Gamma_0 + \frac{1}{8}\,\Gamma_0\cos 2\tau. \tag{32.1}$$

Aus (30.j) berechnen sich die $\overset{(1)}{T}_j$ als erzwungene Schwingungen zu

$$\overset{(1)}{T}_j = \frac{-\bar{r}_j}{1-\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_j}\right)^2}\cos\tau = \overset{(1)}{a}_{j,1}\cos\tau \qquad (j = 2, 3, 4), \tag{32.j}$$

so daß also wegen $\varkappa_1/\varkappa_j \neq 1$ in den Schwingungen T_j Resonanz nicht eintreten kann.

Zu den Lösungen (32.1) und (32.j) könnte man noch jeweils die Lösungen der homogenen Gleichungen mit beliebigen Integrationskonstanten hinzufügen. Über diese Konstanten muß daher durch eine zusätzliche Festsetzung verfügt werden, damit die Rechnung eindeutig wird. Es ist zweckmäßig, auf die Mitnahme der freien Schwingungen in jedem Rechenschritt überhaupt zu verzichten und also alle Integrationskonstanten gleich Null zu setzen. Dadurch wird die Rechnung formal am kürzesten und der Nachteil, daß sich später der Anfangsausschlag des Stabes zur Zeit $t = 0$ als Reihenentwicklung ergibt, kann in Kauf genommen werden.

Für die Glieder zweiter Ordnung in ε folgen die Gleichungen

$$\overset{(2)}{T}_1'' + \overset{(2)}{T}_1 = -\frac{3}{2}\,\Gamma_0\,\overset{(0)}{T}_1\,\overset{(1)}{T}_1 - \frac{1}{4}\,\Gamma\,\overset{(0)}{T}_1^3 - \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(1)}{T}_1'' - \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(0)}{T}_1'', \tag{33}$$

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^2 \overset{(2)}{T}_2'' + \overset{(2)}{T}_2 = -\frac{1}{8}\,\gamma_0\,\overset{(1)}{T}_2\,\overset{(0)}{T}_1 - \overset{(1)}{q}_2\,\overset{(1)}{T}_2'', \tag{34}$$

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}\right)^2 \overset{(2)}{T}_3'' + \overset{(2)}{T}_3 = -\frac{1}{18}\,\gamma_0\,\overset{(1)}{T}_3\,\overset{(0)}{T}_1 - \overset{(1)}{q}_3\,\overset{(1)}{T}_3'', \tag{35}$$

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_4}\right)^2 \overset{(2)}{T}_4'' + \overset{(2)}{T}_4 = -\frac{1}{32}\,\gamma_0\,\overset{(1)}{T}_4\,\overset{(0)}{T}_1 - \overset{(1)}{q}_4\,\overset{(1)}{T}_4'', \tag{36}$$

die sich mit den Lösungen (29) und (32) leicht auswerten lassen. Aus (33) ergibt sich zunächst mit nach (31) bekanntem $\overset{(1)}{q}_1$

$$\overset{(2)}{T}_1'' + \overset{(2)}{T}_1 = \left(\frac{15}{32}\,\Gamma_0^2 - \frac{3}{16}\,\Gamma + \overset{(2)}{q}_1\right)\cos\tau + \frac{r_1}{2}\,\Gamma_0\cos 2\tau + \left(-\frac{3}{32}\,\Gamma_0^2 - \frac{1}{16}\,\Gamma\right)\cos 3\tau,$$

woraus zuerst

$$\overset{(2)}{q}_1 = -\frac{15}{32}\,\Gamma_0^2 + \frac{3}{16}\,\Gamma \tag{37}$$

folgt und sodann $\overset{(2)}{T}_1$ als streng periodisch berechnet werden kann:

$$\overset{(2)}{T}_1 = -\frac{\bar{r}_1 \Gamma_0}{6} \cos 2\tau + \left(\frac{3}{256}\Gamma_0^2 + \frac{1}{128}\Gamma\right)\cos 3\tau . \tag{38}$$

Da verabredungsgemäß freie Schwingungen niemals zu den erzwungenen Schwingungen zugefügt werden sollen, ist also auch (38), wie alle $\overset{(n)}{T}_1$ $(n = 2, 3, \ldots)$ frei von der ersten Harmonischen $\cos\tau$, die also allein in $\overset{(0)}{T}_1$ vorkommt.

Bei der Auswertung der Gleichungen (34), (35) und (36) ist zu beachten, daß auch die rechtsseitig vorkommenden Frequenzparameter $\overset{(n)}{q}_j$ $(j = 2, 3, 4)$ als bekannt anzusehen sind. Mit den Lösungen (29) und (32) sind also die rechten Seiten vollständig gegeben und man erhält

$$\overset{(2)}{T}_2 = -\frac{1}{16}\gamma_0 \overset{(1)}{a}_{2,1} - \frac{\gamma_0 \overset{(1)}{a}_{2,1}}{16\left(1 - 4\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^2\right)}\cos 2\tau + \frac{\overset{(1)}{q}_2 \overset{(1)}{a}_{2,1}}{1 - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^2}\cos\tau ,$$

$$\overset{(2)}{T}_3 = -\frac{1}{36}\gamma_0 \overset{(1)}{a}_{3,1} - \frac{\gamma_0 \overset{(1)}{a}_{3,1}}{36\left(1 - 4\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}\right)^2\right)}\cos 2\tau + \frac{\overset{(1)}{q}_3 \overset{(1)}{a}_{3,1}}{1 - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}\right)^2}\cos\tau ,$$

$$\overset{(2)}{T}_4 = -\frac{1}{64}\gamma_0 \overset{(1)}{a}_{4,1} - \frac{\gamma_0 \overset{(1)}{a}_{4,1}}{64\left(1 - 4\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_4}\right)^2\right)}\cos 2\tau + \frac{\overset{(1)}{q}_4 \overset{(1)}{a}_{4,1}}{1 - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_4}\right)^2}\cos\tau .$$

Aus diesen Lösungsteilen erkennt man, daß über die bereits ausgesprochene Bedingung $\varkappa_1/\varkappa_j$ $(j = 2, 3, 4)$ hinaus auch noch $\varkappa_1/\varkappa_j \neq 1/n$ (n ganz, $j = 2, 3, 4$) gelten muß, so daß sich darin die bekannten mathematischen Schwierigkeiten der Störungsrechnung mit den kleinen Divisoren anzeigen. Für die hier nur interessierenden Effekte überwiegender Größenordnung ist diese mathematische Problematik jedoch belanglos und die Berechnung des Quotienten $q_1^2(w_m)$ soll mit der nachfolgenden Bestimmung von $q_1^{(3)}$ abgeschlossen werden. Zu dem Zweck wird von den Gliedern mit dem Faktor ε^3 lediglich

$$\begin{aligned}\overset{(3)}{T}_1'' + \overset{(3)}{T}_1 = &-\frac{3}{4}\Gamma_0\left(\overset{(1)}{T}_1^2 + 2\,\overset{(0)}{T}_1\,\overset{(2)}{T}_1\right) - \Gamma_0\,\overset{(1)}{T}_2^2 - \frac{9}{4}\Gamma_0\,\overset{(1)}{T}_3^2 - 4\,\Gamma_0\,\overset{(1)}{T}_4^2 \\ &-\frac{3}{4}\Gamma\,\overset{(0)}{T}_1^2\,\overset{(1)}{T}_1 - \overset{(3)}{q}_1\,\overset{(0)}{T}_1'' - \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(1)}{T}_1'' - \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(2)}{T}_1''\end{aligned} \tag{39}$$

gebraucht. Auf der rechten Seite ist allein der bei $\overset{(0)}{T}_1'' = -\cos\tau$ als Vorfaktor stehende Frequenzparameter $\overset{(3)}{q}_1$ unbekannt und nur dieser soll berechnet werden. Ausführlicher geschrieben lautet Gleichung (39)

$$\begin{aligned}\overset{(3)}{T}_1'' + \overset{(3)}{T}_1 = &-\frac{3}{4}\Gamma_0\left(-\frac{3}{8}\Gamma_0 + \frac{1}{8}\Gamma_0\cos 2\tau\right)^2 \\ &-\frac{3}{2}\Gamma_0\cos\tau\left(-\frac{\bar{r}_1\Gamma_0}{6}\cos 2\tau + \left(\frac{3}{256}\Gamma_0^2 + \frac{1}{128}\Gamma\right)\cos 3\tau\right) \\ &-\Gamma_0\,\overset{(1)}{a}_{2,1}^2\cos^2\tau - \frac{9}{4}\Gamma_0\,\overset{(1)}{a}_{3,1}^2\cos^2\tau - 4\,\Gamma_0\,\overset{(1)}{a}_{4,1}^2\cos^2\tau \\ &-\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\tau\right)\left(-\frac{3}{8}\Gamma_0 + \frac{1}{8}\Gamma_0\cos 2\tau\right) \\ &+\overset{(3)}{q}_1\cos\tau - \overset{(2)}{q}_1\,\overset{(1)}{T}_1'' - \overset{(1)}{q}_1\,\overset{(2)}{T}_1'' ,\end{aligned}$$

worin jedoch für die Berechnung von $\overset{(3)}{q}_1$ nur die $\cos\tau$-Terme von Bedeutung sind, so daß $\overset{(1)}{T}_1''$ und $\overset{(2)}{T}_1''$ nicht ausführlich niedergeschrieben zu werden brauchen. Durch Ordnung nach den Harmonischen erkennt man, daß rechtsseitig als erste Harmonische allein

$$\left(\frac{1}{8}\bar{r}_1\Gamma_0^2 + \overset{(3)}{q}_1\right)\cos\tau$$

erscheint, und diese muß auch hier durch Wahl von $\overset{(3)}{q}_1$ zum Verschwinden gebracht werden, damit die Lösung rein periodisch bleibt. Mit

$$\overset{(3)}{q}_1 = -\frac{1}{8}\,\bar{r}_1\,\Gamma_0^2 \tag{40}$$

ist also die Frequenzgleichung (27.i) für $i = 1$

$$q_1^2 = 1 + \overset{(1)}{q}_1\,\varepsilon + \overset{(2)}{q}_1\,\varepsilon^2 + \overset{(3)}{q}_1\,\varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4)$$

bis auf Glieder der Größenordnung ε^4 bekannt. Mit den Werten (31), (37) und (40) für die Koeffizienten wird

$$q_1^2 = 1 + \bar{r}_1\,\varepsilon + \left(\frac{3}{16}\,\Gamma - \frac{15}{32}\,\Gamma_0^2\right)\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\,\bar{r}_1\,\Gamma_0^2\,\varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4)\,. \tag{41}$$

In den ursprünglichen Bezeichnungen und in der obigen Näherung kann (41) auch in der Form

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2}\,\frac{\eta_1\,l^2}{\pi^2\,P_E\,w_m} + \left(\frac{3}{16}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2} - \frac{15}{32}\left[\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2}\,\frac{w_0}{i_F}\right]^2\right)\frac{w_m^2}{i_F^2}$$

$$- \frac{1}{8}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2}\,\frac{\eta_1\,l^2}{\pi^2\,P_E\,i_F}\left[\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2}\,\frac{w_0}{i_F}\right]^2\frac{w_m}{i_F} = 0 \tag{42}$$

geschrieben werden, so daß man diese Gleichung für w_m als eine Frequenzgleichung vom *Duffing*schen Typ erkennt, die wir sogleich diskutieren.

Zu je einem der drei aus (42) zu berechnenden Wurzelwerte von w_m gehört eine spezielle erzwungene Schwingung des gekrümmten Stabes, gekennzeichnet durch einen bestimmten Schwingungsausschlag an einer beliebigen Stabstelle x. Dieser Ausschlag zur Zeit $t = 0$ werde im weiteren als Amplitude bezeichnet, da die zugehörige Auslenkungsgeschwindigkeit $w_t(x, t = 0)$ verschwindet, denn alle Zeitfunktionen $T_j'(t)$ sind durch reine Sinusreihen gegeben. Die Schwingungsamplitude an der Stelle x ist also in unserer Näherung durch

$$w(x, t = 0) = w_m \sum_{j=1}^{4} \sin j\frac{\pi\,x}{l} \cdot \left(\overset{(0)}{T}_j(0) + \varepsilon\,\overset{(1)}{T}_j(0) + \varepsilon^2\,\overset{(2)}{T}_j(0)\right) \tag{43}$$

bestimmt, wenn man sich auf den durchgeführten viergliedrigen Produktansatz beschränkt und die Zeitfunktionen unter Vernachlässigung kubischer und höherer Potenzen von ε einsetzt. Z. B. erhält man für eine in Stabmitte angreifende schwingende Einzellast zuerst aus (20) mit $x_0 = l/2$ die benötigten Koeffizienten $\bar{r}_j$ und dann mit (32.1) und (32.j) für die Amplitude in erster Näherung

$$w(x, t = 0) = w_m\left(\sin\frac{\pi\,x}{l} \cdot \left[1 - \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w_0}{i_F}\right)^2}\,\frac{w_0\,w_m}{i_F^2} + \cdots\right]\right.$$

$$\left. + \sin 3\frac{\pi\,x}{l} \cdot \left[\frac{2}{81\,\pi^2}\,\frac{P\,l}{P_E\,w_m}\,\frac{1}{1 - \left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_3}\right)^2} + \cdots\right] + \cdots\right).$$

Die Amplitude (43) läßt sich also, wie aus den gegebenen Formeln und dem vorstehenden Beispiel im einzelnen hervorgeht, eindeutig aus w_m berechnen.

Charakteristisch für die vorliegende Schwingung ist somit die in (42) liegende Mehrdeutigkeit bezüglich w_m. Die algebraische Gleichung (42) hat die Form

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \varepsilon\,\frac{A}{w_m} + \varepsilon^2\,B\,w_m^2 + \varepsilon^3\,C\,w_m = 0\,, \tag{44}$$

wenn A, B, C abkürzende Konstanten bezeichnen. Man erkennt aus (42) unmittelbar, daß stets $\varepsilon\,A > 0$ und $\varepsilon^3\,C > 0$ ist. Der bei w_m^2 stehende Vorfaktor $\varepsilon^2\,B$ ist positiv für $w_0 < i_F/\sqrt{2}$ und negativ für $w_0 > i_F/\sqrt{2}$. Nehmen wir beispielsweise den letzteren Fall an, so erkennt man aus einer einfachen Kurvendiskussion leicht, daß (44) graphisch durch eine Kurve dargestellt wird, die in Abb. 2 qualitativ skizziert ist. Dabei ist, was man zunächst für selbstverständlich halten wird,

$\eta_1 = \text{const}$ vorausgesetzt. Abb. 2 entspricht qualitativ völlig der Amplituden-Frequenz-Kurve des einfachen (*Duffing*schen) Schwingers mit unterlinearer Federcharakteristik. Hätten wir $w_0 < i_F/\sqrt{2}$ angenommen, so hätte sich $\varepsilon^2 B > 0$ ergeben, und statt der Abb. 2 hätte man die Amplitudenkurve der überlinearen Schwingung erhalten. Entsprechend der Verwandschaft mit dem *Duffing*-Schwinger entspricht der punktierte Ast der Kurve von Abb. 2 einer instabilen Schwingung und nur die ausgezogenen Äste gehören einer stabilen Schwingung zu, was allerdings noch nachzuweisen ist (vergl. Abschnitt 5). Wie man aus den Kurven ferner abliest, stoßen der „stabile" und der „instabile" Ast in Punkten mit lotrechter Tangente zusammen. Die Schwingung muß also das vom einfachen Schwinger her bekannte Amplituden-Kipp-Phänomen zeigen.

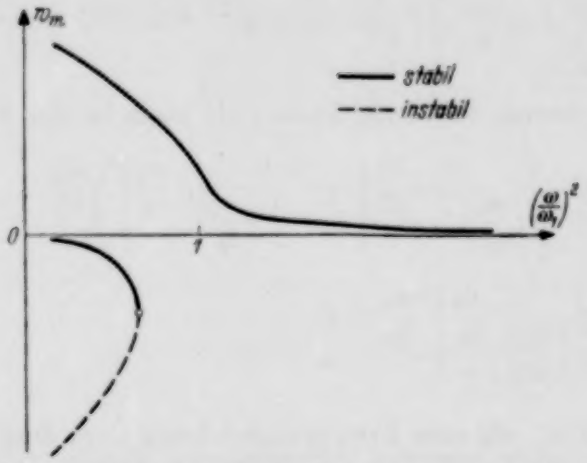

Abb. 2. Graphisches Bild der Frequenz-Amplituden-Beziehung (42) im unterlinearen Fall $w_0 > i_F/\sqrt{2}$ (Lastamplitude konstant).

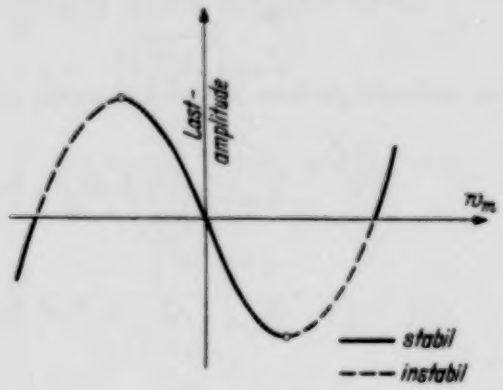

Abb. 3. Graphisches Bild der Beziehung (42) für $\omega/\omega_1 = \text{konst.} < 1$ und $w_0 > i_F/\sqrt{2}$.

Die enge Verwandschaft des vorliegenden Schwingungsproblems mit dem statischen Durchschlagproblem wird jedoch erst aus einer anderen Darstellung deutlich. Setzen wir nämlich in (42) bzw. (44) $(\omega/\omega_1)^2 = \text{const} < 1$ und lassen dafür η_1 und damit nach (12) die Amplitude der äußeren Belastung variieren, so wird (42) durch eine Kurve nach Art der Abb. 3 wiedergegeben. Wieder ist dabei $w_0 > i_F/\sqrt{2}$ gewählt. Und auch in Abb. 3 gehören die ausgezogenen Teile der Kurve zu stabilen und die punktierten zu instabilen Schwingungen. Abb. 3 ist so zu deuten: Steigert man die Lastamplitude von Null an, so wächst der Schwingungsausschlag, für den wir das Maß w_m benutzen, zunächst stetig mit; man erreicht dann aber einen Indifferenzpunkt mit horizontaler Tangente, von dem aus sich die Last-Ausschlag-Kurve „instabil" nach abwärts senkt, während die Schwingungsamplitude nicht dieser Kurve folgt, sondern auf einen stabilen Ast der Kurve überspringt. Natürlich ist das nichts anderes als das oben schon erwähnte Kipp-Phänomen in einer anderen Koordinatenebene gesehen. Die Ähnlichkeit von Abb. 3 mit der Last-Amplituden-Kurve des statischen Durchschlagens[1] springt in die Augen, woraus wir die Berechtigung ableiten, auch im kinetischen Fall von Durchschlagen zu sprechen.

Allerdings hat die Analogie zwischen dem statischen und dem kinetischen Problem auch ihre Grenzen. Diese bestehen hauptsächlich darin, daß das Phänomen des kinetischen Durchschlagens oder Kippens auch dann noch, und zwar überlinear bestehen bleibt, wenn $w_0 = 0$, der Stab also gerade ist[2], während das Phänomen andererseits verschwindet, wenn $w_0 = i_F/\sqrt{2}$ wird. Dieser spezielle Wert der Vorauslenkung bestimmt die Grenze zwischen dem unterlinearen und dem überlinearen Fall der Zwangsschwingungen und daher erfolgt dann überhaupt kein Kippen der Amplituden.

b) Erregerfrequenz in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz. Da die erste Eigenfrequenz und die zugehörige Schwingungsgleichung (25.1) durch die gewählte spezielle sinusförmige Vorverformung ausgezeichnet ist, soll die Frequenz-Amplituden-Gleichung noch für eine Erregerfrequenz in der Nähe einer anderen, nicht ausgezeichneten Eigenfrequenz berechnet werden. Für

[1] Vgl. Abb. 3 der in Fußnote 1 auf S. 301 genannten Darstellung von *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*.
[2] Dieser Sonderfall wurde ohne Hinweis auf die Verwandtschaft mit dem Durchschlagen getrennt behandelt: *E. Mettler*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 263.

diese Rechnung wird die Erregerfrequenz als in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz gelegen vorausgesetzt und im übrigen die formale Störungsrechnung ganz entsprechend der bereits im Abschnitt a) beschriebenen durchgeführt.

In (27.i) ist jetzt $i = 2$ zu setzen, und wenn man dementsprechend in (28) die Indizes 1 und 2 vertauscht, findet man die von ε freien Glieder einer mit 2π periodischen Lösung zur Beschreibung der erzwungenen Schwingungen für $\bar{r}_2 \neq 0$

$$\overset{(0)}{T}_2 = \cos\tau\,, \qquad \overset{(0)}{T}_j \equiv 0 \qquad (j = 1, 3, 4)\,.$$

Die Glieder erster Ordnung in ε verlangen entsprechend (30.1) und (30.j) hier etwas anders

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2 \overset{(1)}{T}{}_1'' + \overset{(1)}{T}_1 = -\,\Gamma_0\,\overset{(0)}{T}_2^2 - \bar{r}_1\cos\tau\,, \tag{45.1}$$

$$\overset{(1)}{T}{}_2'' + \overset{(1)}{T}_2 = -\,\bar{r}_2\cos\tau - \overset{(1)}{q}_2\,\overset{(0)}{T}{}_2''\,, \tag{45.2}$$

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_j}\right)^2 \overset{(1)}{T}{}_j'' + \overset{(1)}{T}_j = -\,\bar{r}_j\cos\tau \qquad (j = 3, 4)\,. \tag{45.j}$$

Aus (45.2) kann mit $\overset{(0)}{T}{}_2'' = -\cos\tau$ zunächst

$$\overset{(1)}{q}_2 = \bar{r}_2 \tag{46}$$

und sodann

$$\overset{(1)}{T}_2 \equiv 0$$

gefunden werden. Für $\overset{(1)}{T}_1$ gewinnt man aus (45.1)

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2 \overset{(1)}{T}{}_1'' + \overset{(1)}{T}_1 = -\frac{\Gamma_0}{2} - \bar{r}_1\cos\tau - \frac{\Gamma_0}{2}\cos 2\tau\,,$$

so daß

$$\overset{(1)}{T}_1 = -\frac{\Gamma_0}{2} - \frac{\bar{r}_1}{1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2}\cos\tau - \frac{\Gamma_0}{2\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]}\cos 2\tau$$

wird. Die Lösungen der Gleichungen (45.j) lauten

$$\overset{(1)}{T}_j = \frac{-\,\bar{r}_j}{1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_j}\right)^2}\cos\tau = \overset{(1)}{b}_{j,1}\cos\tau \qquad (j = 3, 4)\,.$$

Die Glieder zweiter Ordnung in ε führen wegen $\overset{(1)}{T}_2 \equiv 0$, $\overset{(0)}{T}_j \equiv 0$ $(j = 1, 3, 4)$ auf die Differentialgleichungen

$$\overset{(2)}{T}{}_2'' + \overset{(2)}{T}_2 = -\frac{\gamma_0}{8}\,\overset{(1)}{T}_1\,\overset{(0)}{T}_2 - \frac{1}{4}\,\overset{(0)}{T}_2^3 - \overset{(2)}{q}_2\,\overset{(0)}{T}{}_2''\,, \tag{47.2}$$

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_j}\right)^2 \overset{(2)}{T}{}_j'' + \overset{(2)}{T}_j = -\,\overset{(1)}{q}_1\,\overset{(1)}{T}_j \qquad (j = 1, 3, 4)\,, \tag{47.j}$$

deren rechte Seiten wiederum durch die vorhergehende Rechnung bekannt sind. Für $j = 1$ findet man

$$\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2 \overset{(2)}{T}{}_1'' + \overset{(2)}{T}_1 = -\,\overset{(1)}{q}_1\left(\frac{\bar{r}_1}{1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2}\cos\tau + \frac{2\,\Gamma_0}{1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2}\cos 2\tau\right)$$

mit der Lösung

$$\overset{(2)}{T}_1 = -\frac{\overset{(1)}{q}_1\,\bar{r}_1}{\left[1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]^2}\cos\tau - \frac{2\,\overset{(1)}{q}_1\,\Gamma_0}{\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]^2}\cos 2\tau\,.$$

Aus (47.2) läßt sich der für die Frequenzgleichung besonders interessierende Entwicklungskoeffizient $\overset{(2)}{q}_2$ bestimmen. Man erhält zunächst

$$\overset{(2)}{T}_2'' + \overset{(2)}{T}_2 = -\frac{\gamma_0}{8}\cos\tau\left(-\frac{\Gamma_0}{2} - \frac{\bar{r}_1}{1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2}\cos\tau - \frac{\Gamma_0}{2\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]}\cos 2\tau\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\cos\tau + \frac{1}{4}\cos 3\tau\right) + \overset{(2)}{q}_2\cos\tau\,,$$

und da auf der rechten Seite das Glied mit $\cos\tau$ zu verschwinden hat, muß also

$$\overset{(2)}{q}_2 = \frac{3}{16} - \frac{\gamma_0\Gamma_0}{16}\left(1 + \frac{1}{2\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]}\right) \tag{48}$$

sein.

Der Wert von $\overset{(3)}{q}_2$ läßt sich schon mit Kenntnis von $\overset{(2)}{T}_1$ und $\overset{(0)}{T}_2$ allein berechnen und soll daher noch angegeben werden. Aus

$$\overset{(3)}{T}_2'' + \overset{(3)}{T}_2 = -\frac{\gamma_0}{8}\overset{(2)}{T}_1\overset{(0)}{T}_2 - \overset{(3)}{q}_2\overset{(0)}{T}_2'' - \overset{(1)}{q}_2\overset{(2)}{T}_2'$$

folgt nämlich

$$\overset{(3)}{T}_2'' + \overset{(3)}{T}_2 = -\frac{\gamma_0}{8}\left(-\frac{\overset{(1)}{q}_1\bar{r}_1}{\left[1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]^2}\cos\tau - \frac{2\overset{(1)}{q}_1\Gamma_0}{\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]^2}\cos 2\tau\right)\cos\tau + \overset{(3)}{q}_2\cos\tau - \overset{(1)}{q}_2\overset{(2)}{T}_2''.$$

Also hat $\overset{(3)}{q}_2$ den Wert

$$\overset{(3)}{q}_2 = -\frac{\overset{(1)}{q}_1\Gamma_0\gamma_0}{8\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]^2}. \tag{49}$$

Die Frequenzgleichung (27.i) für $i = 2$ lautet demnach mit (46), (48) und (49)

$$q_2^2 = 1 + \bar{r}_2\varepsilon + \left(\frac{3}{16} - \frac{\gamma_0\Gamma_0}{16}\left(1 + \frac{1}{2\left[1-4\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)^2\right]}\right)\right)\varepsilon^2 - \frac{\overset{(1)}{q}_1\gamma_0\Gamma_0}{8\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]^2}\varepsilon^3 + 0(\varepsilon^4) \tag{50}$$

und entspricht der Gleichung (42).

Die für Erregerfrequenzen ω in der Nähe der zweiten Eigenfrequenz ω_2 geltende Gleichung (50) ist wiederum vom *Duffing*schen Typus und kann zur Bestimmung von w_m verwendet werden. Zu jedem Wurzelwert gehört dann wieder eine spezielle erzwungene Schwingung, die durch den Stabausschlag an einer beliebigen Stelle x zur Zeit $t = 0$ gekennzeichnet werden kann. Für eine Berechnung dieser Auslenkung in der Näherung $0(\varepsilon^3)$ benötigt man außer dem bereits angegebenen $\overset{(2)}{T}_1$ noch die Lösungen $\overset{(2)}{T}_j$ für $j = 2, 3, 4$:

$$\overset{(2)}{T}_2 = \frac{\gamma_0\bar{r}_1}{16\left[1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]} - \frac{\gamma_0\bar{r}_1}{48\left[1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]}\cos 2\tau + \left(\frac{1}{128} - \frac{\gamma_0\Gamma_0}{256\left[1-4\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\right)^2\right]}\right)\cos 3\tau\,,$$

$$\overset{(2)}{T}_j = -\frac{\overset{(1)}{q}_j\bar{r}_j}{\left[1-\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_j}\right)^2\right]^2}\cos\tau \qquad (j = 1, 3, 4)\,.$$

Damit kann dann, wie für $\omega \approx \omega_1$ geschehen, der Stabausschlag an der Stelle x zur Zeit $t = 0$ mit der Reihenentwicklung (43) angegeben werden. Da auch hier $w_t(x, t = 0) = 0$ ist, kann man durch diese Angaben die zugehörigen erzwungenen Stabschwingungen auch für $\omega \approx \omega_2$ genügend genau kennzeichnen. Die Formeln sollen jedoch nicht im einzelnen niedergeschrieben werden, da Besonderheiten gegenüber der im Abschnitt a) ausführlich wiedergegebenen Rechnung nicht auftreten.

5. Stabilitätsuntersuchung. Aus den Frequenzgleichungen (42) und (50) können für eine vorgegebene Erregerfrequenz jeweils entweder ein Wert oder drei Werte des Amplitudenfaktors w_m berechnet werden, so daß man mit diesen Werten auf einen mehrdeutigen Schwingungszustand geführt wird. Es wäre nun noch für jeden solchermaßen berechneten Wert von w_m nachzuprüfen, ob der zugehörige Schwingungszustand stabil ist und somit physikalische Realität besitzt. Eine derartige Stabilitätsuntersuchung ist mathematisch außerordentlich weitläufig, so daß im folgenden nur eine erste Näherung durchgeführt werden soll. Diese Näherungsrechnung verwendet die von *J. Haag*[1] auf Schwingungssysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden erweiterte Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude und gestattet in der damit nur erreichbaren niedersten Näherung die Rückführung der Stabilitätsfrage auf die Stabilität der erzwungenen Schwingungen des *Duffing*schen Schwingers mit nur einem Freiheitsgrad. Da dieses einfachere Schwingungs- und Stabilitätsproblem eingehend untersucht ist, wird mit dieser Rückführung die Aufgabe näherungsweise gelöst.

Für die Stabilitätsuntersuchung ist das Abklingen einer eingeleiteten Störung durch kleine Dämpfungskräfte so wesentlich, daß die bisherige Vernachlässigung dieser tatsächlich stets vorhandenen Kräfte aufgegeben werden muß. Die Frequenz-Amplituden-Gleichungen werden sich allerdings durch die Mitberücksichtigung einer sehr kleinen Dämpfung nur unwesentlich ändern, so daß die bisherige Vernachlässigung der Dämpfungen eine gewisse Berechtigung hatte.

Zur Durchführung der formalen Rechnung wird das allgemeine Gleichungssystem (17) mit einem kleinen Parameter λ in der Form

$$T_j'' + \frac{1}{q_j^2}\, T_j = \frac{\lambda}{q_j^2}\left(-\bar{d}_j\, q_j\, T_j' - \sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \bar{\zeta}_{lk,j}\, T_l\, T_k - T_j \sum_{k=1}^{N} \bar{\gamma}_{jk}\, T_k^2 - \bar{r}_j \cos\tau\right) = \frac{\lambda}{q_j^2}\, F_j \qquad (51)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N)$$

geschrieben, worin die rechten Seiten durch die Bezeichnungen

$$d_j = \bar{d}_j\,\lambda\,, \qquad \zeta_{lk,j} = \bar{\zeta}_{lk,j}\,\lambda\,, \qquad \gamma_{jk} = \bar{\gamma}_{jk}\,\lambda\,, \qquad r_j = \bar{r}_j\,\lambda$$

als klein von mindestens der Größenordnung λ gekennzeichnet sind. Mit den teilerfremden ganzen Zahlen m_j und M und den Konstanten ε_j werden die Frequenzverhältnisse durch $1/q_j = \varkappa_j/\varkappa = m_j\sqrt{1+\lambda\,\varepsilon_j}/M$, $(j = 1, 2, \ldots, N)$ angenähert und dementsprechend die Lösungen T_j in der Form

$$T_j = y_j \cos\left(\frac{m_j}{M}\,\tau + x_j\right) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, N)$$

mit wenig von der Zeit abhängenden Amplituden y_j und Phasen x_j angesetzt. Diese Langsamveränderlichkeit soll durch die zusätzliche Forderung

$$T_j' = -\frac{m_j}{M}\, y_j \sin\left(\frac{m_j}{M}\,\tau + x_j\right) = -\frac{m_j}{M}\, y_j \sin\Phi_j \qquad (52)$$

mit $\Phi_j = \frac{m_j}{M}\,\tau + x_j$ zum Ausdruck kommen, so daß also die Nebenbedingungen

$$-y_j\, x_j' \sin\Phi_j + y_j' \cos\Phi_j = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, N) \qquad (53)$$

bestehen müssen. Durch weitere Differentiation findet man aus (52) den Wert T_j'' und kann damit an Stelle von (51)

$$-y_j\, x_j' \cos\Phi_j - y_j' \sin\Phi_j = \lambda\,\frac{m_j}{M}\,(-\varepsilon_j\, y_j \cos\Phi_j + F_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \qquad (54)$$

schreiben. Die Gleichungen (53) und (54) lassen sich sodann nach $y_j\, x_j'$ und y_j' auflösen, was auf

$$\left.\begin{aligned} y_j\, x_j' &= \lambda\,\frac{m_j}{M}\,(\varepsilon_j\, y_j \cos\Phi_j - F_j)\cos\Phi_j\,, \\ y_j' &= \lambda\,\frac{m_j}{M}\,(\varepsilon_j\, y_j \cos\Phi_j - F_j)\sin\Phi_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

führt.

[1] *J. Haag*, Les Mouvements vibratoires, Bd. 2, S. 210, Paris 1955. Die Methode wurde in der Arbeit *F. Weidenhammer*, Ing. Arch. 26 (1956), S. 53, ausführlicher dargestellt, weshalb wir uns hier kurz fassen. können. Vergl. auch *F. Weidenhammer*, Z. angew. Math. Mech. 36 (1956), S. 235.

Aus diesem Differentialgleichungssystem erster Ordnung kann man durch Mittelung der rechten Seiten über eine Periode $2\pi M$ ein System ableiten, in dem die Zeit nicht mehr explizite auftritt und aus dem sich in definierter Näherung die Frequenz-Amplituden-Gleichungen herleiten lassen und auch die Stabilitätsfragen entschieden werden können. Für diese nun vorzunehmende Mittelung ist zu beachten, daß die Erregerfrequenz jeweils in der Nähe einer der beiden Eigenfrequenzen liegen soll. Es ist also für $i = 1$ oder $i = 2$

$$\frac{1}{q_i} = \sqrt{1 + \lambda\,\varepsilon_i}\,, \qquad \frac{1}{q_j} = \frac{m_j}{M}\sqrt{1 + \lambda\,\varepsilon_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N, \neq i)$$

zu setzen, so daß die Mittelwerte der rechten Seiten von (55) leicht zu bilden sind, da man hierbei x_j, y_j wegen ihrer Langsamveränderlichkeit als Konstante ansehen darf. Man erhält an Stelle von (55) die einfacheren Gleichungen

$$y_i' = \lambda\left(-\bar{d}_i\,\frac{y_i}{2} + \frac{\bar{r}_i}{2}\sin x\right), \tag{56.1}$$

$$y_i\,x_i' = \lambda\left(\frac{y_i}{4}\sum_{\substack{k=1\\ \neq i}}^{N}\bar{\gamma}_{ik}\,\gamma_k^2 + \frac{3}{8}\,\bar{\gamma}_{ii}\,y_i^3 + \frac{\bar{r}_i}{2}\cos x_i + \varepsilon_i\,\frac{y_i}{2}\right), \tag{56.2}$$

$$y_j' = \lambda\,\frac{m_j}{M}\left(-\bar{d}_j\,\frac{y_j}{2}\right), \tag{57.1}$$

$$y_j\,x_j' = \lambda\,\frac{m_j}{M}\left(\frac{y_j}{4}\sum_{\substack{k=1\\ \neq i}}^{N}\bar{\gamma}_{jk}\,y_k^2 + \frac{3}{8}\,\bar{\gamma}_{jj}\,y_j^3 + \varepsilon_j\,\frac{y_j}{2}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots N, \neq i)\,, \tag{57.2}$$

worin die letzten Gleichungen erkennen lassen, daß die Amplitudenwerte $y_j = 0$ nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Aus den Gleichungen (56) und (57) lassen sich die erforderlichen Schlüsse auf das Stabilitätsverhalten in dem hier benötigten Umfang ziehen.

Zunächst berechnet man für stationäre Schwingungen nochmals, jedoch nun nur noch in erster Näherung, aus den Gleichungen (56) und (57) die Beziehungen zwischen den Amplituden y_i und den Phasen. Denn für den eingeschwungenen Zustand müssen die Amplituden y_j und die Phasen x_j sämtlich feste Werte annehmen. Man liest zunächst aus (57.1) ab, daß in dieser Näherung alle Amplituden $y_j (j = 1, 2, \ldots, \neq i)$ verschwinden, so daß die nur noch verbleibenden Gleichungen (56.1) und (56.2) eine Aussage über die Amplitude y_i und die zugehörige Phase x_i allein liefern:

$$-d_i\,\frac{y_i}{2} + \frac{r_i}{2}\sin x_i = 0\,, \tag{58.1}$$

$$\frac{3}{8}\,\gamma_{ii}\,y_i^3 + \frac{r_i}{2}\cos x_i + \lambda\,\varepsilon_i\,\frac{y_i}{2} = 0\,. \tag{58.2}$$

Diese Gleichungen erhält man auch, wenn man den einfachen *Duffing*schen Schwinger allein betrachtet. Tatsächlich ist ja auch in dem System (51) für $j = i$ allein und $\zeta_{lk,i} = 0$ $(l, k = 1, 2, \ldots, N)$ die *Duffing*sche Schwingungsgleichung enthalten und diese führt also auf den gleichen, durch (58.1) und (58.2) beschriebenen Zusammenhang zwischen Amplitude und Phase. Aus diesen Gleichungen gewinnt man mit $1 - q_i^2 = \lambda\,\varepsilon_i + 0(\lambda^2)$ nach Elimination der Phase x_i die Frequenz-Amplituden-Gleichung in der gewohnten *Duffing*schen Form

$$q_i^2 = 1 + \sqrt{\frac{r_i^2}{y_i^2} - d_i^2} + \frac{3}{4}\,\gamma_{ii}\,y_i^2\,. \tag{59}$$

Für verschwindende Dämpfung $(d_i = 0)$ müßte diese Gleichung identisch sein mit der ausführlich berechneten Frequenz-Amplituden-Gleichung (41) bzw. (42), wenn die Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude eine gleichermaßen vollständige Näherung zu berechnen gestattete, wie die Störungsrechnung für ungedämpfte Schwingungen. Tatsächlich gibt (59) für $d_i \neq 0$ nur die ersten drei rechtsseitigen Terme von (41) richtig wieder. Wir müssen uns jedoch mit dieser eingeschränkten niedersten Näherung für die Stabilitätsbetrachtung begnügen. In dieser Näherung wird man also auf ein einfaches *Duffing*sches Schwingungsproblem geführt und man weiß daher, daß von den maximal möglichen drei Amplitudenwerten die Schwingung mit der Amplitude mittleren Betrages einer instabilen Bewegung zugehört und folglich keine physikalische Existenz besitzt. Diese Stabilitätseigenschaften wurden in die Betrachtungen des Abschnittes 4a)

bereits aufgenommen, da sie in der hier durchgeführten Näherung auch für das vollständige System gelten. Dies kann man aus der Tatsache entnehmen, daß die Schwingungen mit den Amplituden $y_i \neq 0, y_j = 0\ (j = 1, 2, \ldots, N, \neq i)$ stabil sind gegen kleine Störungen.

Betrachtet man kleine Abweichungen η_j und ξ_j der Amplituden und der Phasen von ihren stationären Werten in (56) und (57), so erhält man für diese Störungen nach Linearisierung in Bezug auf die Störungsgrößen die Differentialgleichungen

$$\eta_j' = \lambda \left(-\bar{d}_i \frac{\eta_i}{2} + \frac{\bar{r}_i}{2} \cos x_i \cdot \xi_i \right), \tag{60.1}$$

$$y_i \xi_i' = \lambda \left(\frac{9}{8} \bar{\gamma}_{ii} y_i^2 \eta_i - \frac{\bar{r}_i}{2} \sin x_i \cdot \xi_i + \varepsilon_i \frac{\eta_i}{2} \right), \tag{60.2}$$

$$\eta_j' = -\lambda \frac{m_j}{M} \bar{d}_j \frac{\eta_j}{2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, N, \neq i), \tag{61}$$

wenn man $y_j = 0\ (j = 1, 2, \ldots, N, \neq i)$ beachtet und eine leere Aussage über die Phasen ξ_i sogleich fortläßt. Aus (61) folgt nämlich, daß die Amplitudenstörungen $\eta_i (j \neq i)$ sämtlich exponentiell auf Null hin abklingen, so daß etwaige zugehörige Phasenstörungen belanglos sind. Die verbleibenden Störungsgleichungen (60.1) und (60.2) sind unabhängig von den Störungen η_j, ξ_i $(j \neq i)$ und enthalten nur die stationäre Amplitude y_i und die zugehörige Phase x_i. Aus diesen Störungsgleichungen könnte man also das Stabilitätsverhalten des einfachen *Duffingschen* Schwingers herauslesen. Diese Eigenschaften sind jedoch bekannt[1], und man findet hier in den Grenzen der durchgeführten Näherung, daß diese Stabilitätseigenschaften auch für das vollständige System gültig bleiben.

6. Zusammenfassung. In der Statik ist das Durchschlagen des gekrümmten Stabes ein wohlbekanntes Stabilitätsproblem. Ein ganz entsprechendes kinetisches Stabilitätsproblem entsteht, wenn der gekrümmte Stab unter der Einwirkung einer schwingenden Querbelastung steht. Mit den Annahmen der technischen Biegelehre und der *Kirchhoff*schen Näherung für die Stablängskraft kann man zur Beschreibung der Stabschwingungen eine inhomogene nichtlineare Integrodifferentialgleichung für die Biegeschwingung allein aufstellen. Ein Lösungsansatz mit zeitabhängigen Funktionen führt diese partielle Integrodifferentialgleichung für eine beliebige Lastverteilung auf ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen zurück. Aus diesem System lassen sich die erzwungenen Schwingungen mit einer Störungsrechnung berechnen; sie haben im wesentlichen den gleichen Frequenz-Amplituden-Zusammenhang, den man schon vom *Duffing*schen Schwingungsproblem her kennt. Das Stabilitätsverhalten dieser Schwingungen ließ sich mit Hilfe der Methode der langsam veränderlichen Phase und Amplitude näherungsweise ebenfalls aus den entsprechenden Eigenschaften des *Duffing*schen Schwingers verstehen. Es sind daher Amplitudensprünge zu erwarten, die sich in einer Weise deuten lassen, die erkennen läßt, daß sich das statische und das kinetische Problem weitgehend entsprechen.

Aus dem Institut für Mechanische Schwingungstechnik der Technischen Hochschule Karlsruhe.

(Eingegangen am 21. November 1959.)

Anschriften der Verfasser: Prof. Dr. *E. Mettler*, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12,
Prof. Dr. *F. Weidenhammer*, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, Bau 40.

[1] Vgl. z. B. *J. Haag*, Les Mouvements vibratoires, Bd. 1 S. 170, Paris 1952.

Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik

Von Th. Lehmann

1. Einleitung. Bei der Beschreibung von Vorgängen in einem Kontinuum unterscheiden wir die *Euler*sche und die *Lagrange*sche Betrachtungsweise. Diesen beiden Betrachtungsweisen liegen zwei verschiedene physikalische Standpunkte zugrunde, die sich etwa folgendermaßen skizzieren lassen:

Bei der *Euler*schen Betrachtungsweise wird das Geschehen in einem Raume verfolgt, der unabhängig von den Vorgängen in dem Kontinuum ist. Als räumliches Bezugssystem dient ein raumfestes Koordinatensystem. Der Ablauf des Geschehens in dem Kontinuum selbst wird dabei nur implizit erfaßt.

Die *Lagrange*sche Betrachtungsweise richtet sich hingegen primär auf den Ablauf des Geschehens in dem Kontinuum (Körper). Als räumliches Bezugssystem wird bei folgerichtiger Durchführung ein körperfestes Koordinatensystem benutzt, das die Formänderungen des deformierbaren Kontinuums mitmacht. Ein solches Vorgehen setzt freilich voraus, daß die Vorstellung von einem absoluten Raum aufgegeben und durch das „Relativitätsprinzip des Raumes in der klassischen Mechanik" ersetzt wird[1]; denn erst dieses Prinzip erlaubt es, alle Räume mit euklidischer Metrik als grundsätzlich gleichberechtigt anzusehen.

Natürlich kann auch die *Euler*sche Betrachtungsweise sich beliebig bewegter räumlicher Bezugssysteme (starrer und nichtstarrer) bedienen. Ein innerer Zwang dazu besteht aber nicht, weil das räumliche Bezugssystem grundsätzlich unabhängig von den Vorgängen im Kontinuum bleibt. Wir wollen jedoch in der Folge beliebig bewegte Bezugssysteme für die *Euler*sche Betrachtungsweise mit zulassen. Der Begriff „raumfest" bedeutet dann nur noch: „fest in Bezug auf das vom Körper unabhängige räumliche Koordinatensystem". In der Regel wird man sich dabei auf starre Koordinatensysteme beschränken.

Bei den physikalischen Größen, die explizit in die Beschreibung eingehen, treffen wir zweckmäßig folgende Unterscheidungen:

1) Dem Wesen nach unterteilen wir in raumgebundene und raumungebundene Größen. Das Merkmal raumgebundener Größen ist es, daß sie physikalisch in Beziehung zum (körperunabhängigen) Raum stehen und deshalb physikalisch nicht invariant gegen beliebige Transformationen des räumlichen Bezugssystems sind. Dazu gehören beispielsweise Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gegenüber dem Raum, aber auch kinetische Energie, potentielle Energie der Lage usw. Raumungebundene Größen, wie z. B. Spannungen, Formänderungen und thermodynamische Zustandsgrößen, sind dagegen physikalisch invariant gegen solche Transformationen.

2) Der Zuordnung nach unterscheiden wir lokale und substantielle Größen. Lokale Größen sind den Raumpunkten zugeordnet, und ihre zeitlichen Änderungen werden bei festgehaltenem Raumpunkt verfolgt. Substantielle Größen sind dagegen festen Körperpunkten zugeordnet.

3) Der Darstellung nach haben wir raumbezogene und körperbezogene Größen, je nachdem, ob die Maßzahlen der Größen auf das raumfeste oder das körperfeste Koordinatensystem bezogen sind.

Zur Erläuterung dieser Begriffe wollen wir in aller Kürze einige Beispiele betrachten.

a) Die Geschwindigkeit eines Körperpunktes gegenüber dem Raum ist, wenn wir ihren zeitlichen Verlauf bei festgehaltenem Körperpunkt verfolgen, eine raumgebundene, substantielle Größe, die raumbezogen oder körperbezogen dargestellt werden kann. Betrachten wir jedoch das Geschwindigkeitsfeld im Raume, so ist der Feldvektor eine raumgebundene, lokale Größe, deren Maßzahlen wir wiederum nach Belieben auf das raumfeste oder das körperfeste Koordinatensystem beziehen können.

[1] Vgl. hierzu: *Th. Lehmann*, Schiffstechnik 6 (1959), S. 49.

b) Der Spannungstensor in einem Körperpunkt ist eine raumungebundene, substantielle Größe, wenn wir seine zeitliche Änderung bei festgehaltenem Körperpunkt verfolgen. Er ist eine lokale Größe, wenn seine Änderung bei festgehaltenem Raumpunkt verfolgt werden soll. In beiden Fällen können die Maßzahlen des Tensors sowohl auf das körperfeste wie auf das raumfeste Koordinatensystem bezogen werden.

c) Die Änderung raumungebundener, skalarer Größen kann lokal oder substantiell verfolgt werden. Dabei können wir wiederum raumbezogene und körperbezogene Darstellung unterscheiden.

Aus den Definitionen und den Beispielen erkennen wir:

1) Die Einteilung in raumgebundene und raumungebundene Größen bezieht sich auf inhärente Eigenschaften, die als gegeben hinzunehmen sind.

2) Die Unterscheidung lokaler und substantieller Größen ist davon abhängig, wie der Vorgang betrachtet wird. Für die Betrachtung eines Zustandes ist hingegen diese Unterscheidung bedeutungslos. Deshalb wirkt sich diese Unterscheidung im wesentlichen nur bei Differentiationen nach der Zeit und bei Integrationen über die Zeit aus. Die Besonderheiten eines Vorganges legen häufig eine bestimmte Betrachtungsweise nahe. Kinematische Randbedingungen oder stationäre bzw. zeitlich periodische Felder im Raume drängen z. B. nach lokaler Betrachtung, während dem Körper zugeordnete dynamische Randbedingungen sowie die Verfolgung von Zustandsänderungen eine substantielle Verfolgung der Vorgänge herausfordern, besonders wenn die „Geschichte" des Vorganges oder Anisotropieeigenschaften der Körperelemente dabei eine Rolle spielen.

3) Die Art der Darstellung, ob raumbezogen oder körperbezogen, unterliegt der Willkür. Es ist jedoch naheliegend, substantiell betrachtete Vorgänge körperbezogen und lokal betrachtete Vorgänge raumbezogen darzustellen. Die Zusammenhänge werden dadurch durchsichtiger. Der physikalische Unterschied zwischen raumgebundenen und raumungebundenen Größen spielt aber dabei eine Rolle.

Diese Erörterungen zeigen, daß der wesentliche Unterschied zwischen *Euler*scher und *Lagrange*scher Betrachtungsweise in der Zuordnung der Größen zum Raume (*Euler*) oder zum Körper (*Lagrange*) besteht. Welche Betrachtungsweise angemessen ist, hängt von den Gegebenheiten des Vorganges ab. Im allgemeinen werden wir damit rechnen müssen, daß zunächst einige Größen (z. B. kinematische Randbedingungen oder räumliche Kraftfelder) dem Raume, andere Größen (z. B. dynamische Randbedingungen oder Temperaturfelder) dem Körper zugeordnet sind. Es ergibt sich somit häufig die Aufgabe, lokale Größen durch substantielle auszudrücken oder, umgekehrt, substantielle durch lokale. Die hier bestehenden Zusammenhänge sollen die folgenden Betrachtungen aufzeigen. Was sich dabei ergibt, ist im wesentlichen bekannt[1]. Gelegentlich zu findende Unklarheiten bei der Formulierung von Problemen der Kontinuumsmechanik sowie die Feststellung, daß die körperbezogene Darstellung häufig übergangen wird, mögen aber vielleicht doch eine zusammenfassende Betrachtung rechtfertigen.

2. Allgemeine Beziehungen zwischen Lagrangescher und Eulerscher Betrachtungsweise. a) Grundformeln. Wir benutzen ein raumfestes Koordinatensystem x^i und ein körperfestes Koordinatensystem ξ^i. Der im allgemeinen nichtlineare Zusammenhang zwischen diesen beiden Koordinatensystemen sei umkehrbar eindeutig und durch

$$\xi^i = \xi^i(x^k, t)\,, \qquad x^i = x^i(\xi^k, t) \tag{1}$$

gegeben. Die Koordinatendifferentiale transformieren sich linear:

$$d\xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\, dx^k\,, \qquad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\, d\xi^k\,. \tag{2}$$

Die Transformationsmatrizen können als lokale Größen

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}(x^r, t)\,, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}(x^r, t)$$

[1] 1. *J. G. Oldroyd*, Proc. Royal Soc. London 200 (1950), S. 523. — 2. *C. Truesdell*, J. Rational Mechanics and Analysis, 1 (1952), S. 125; 2 (1953), S. 593. — 3. *J. G. Oldroyd*, Proc. Royal Soc. London 245 (1958), S. 278. — 4. *R. Hill*, J. Mechanics and Physics of Solids. 7 (1959), S. 209.

oder als substantielle Größen

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}(\xi^r, t), \qquad \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}(\xi^r, t)$$

eingeführt werden.
Die Transformation beliebiger Tensoren[1] gehorcht dem Schema

$$\bar{a}^{i_1 i_2 \dots}_{k_1 k_2 \dots} = \frac{\partial \xi^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \frac{\partial \xi^{i_2}}{\partial x^{r_2}} \dots \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \xi^{k_1}} \frac{\partial x^{s_2}}{\partial \xi^{k_2}} \dots a^{r_1 r_2 \dots}_{s_1 s_2 \dots}$$

und

$$a^{i_1 i_2 \dots}_{k_1 k_2 \dots} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \xi^{r_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial \xi^{r_2}} \dots \frac{\partial \xi^{s_1}}{\partial x^{k_2}} \frac{\partial \xi^{s_2}}{\partial x^{k_1}} \dots \bar{a}^{r_1 r_2 \dots}_{s_1 s_2 \dots} .$$

Überstrichene Tensoren sind hierbei auf das körperfeste, unüberstrichene Tensoren auf das raumfeste Koordinatensystem bezogen.

Abgekürzt schreiben wir hierfür

$$\left.\begin{aligned} \bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} &= \prod_\alpha \left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta{}' \left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right) a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} , \\ a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} &= \prod_\alpha{}' \left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta \left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right) \bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} . \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die zeitabhängigen Transformationen (3) vermitteln den Zusammenhang zwischen raumbezogenen und körperbezogenen Größen für beliebige Zeiten t. Wir können raumbezogene Größen als lokale und entsprechend körperbezogene Größen als substantielle Größen ansehen, wenn wir nur einen bestimmten Zeitpunkt t ins Auge fassen. Die Ermittlung des Zusammenhanges zwischen den zeitlichen Änderungen der raumbezogenen und der körperbezogenen Größen erfordert hingegen weitergehende Überlegungen, da sich mit der Zeit nicht nur die Größen selbst, sondern auch die Transformationsmatrizen ändern. Außerdem haben wir hierbei substantielle und lokale Änderungen zu unterscheiden.

b) Allgemeines zur Differentiation nach der Zeit[2]. Verfolgen wir bei der Differentiation die zeitliche Änderung einer substantiellen Größe, d. h. halten wir bei der Ableitung den Körperpunkt fest (ξ^i = konst.), so sprechen wir von substantieller Differentiation. Für diese ist das Symbol D/dt gebräuchlich. Die Differentiation kann auf körperbezogene (überstrichene Tensoren) und auf raumbezogene Größen (unüberstrichene Tensoren) angewendet werden.

Wird hingegen bei der Differentiation der Raumpunkt festgehalten (x^i = konst.) und somit die zeitliche Änderung einer lokalen Größe verfolgt, so wollen wir dieses eine lokale Differentiation nennen, für die wir das Symbol $\mathfrak{D}/dt$ benutzen. Sie ist ebenfalls auf körper- und raumbezogene Größen anwendbar.

Der substantielle wie der lokale Differentialquotient gelten jeweils für einen bestimmten Zeitpunkt. Wir können den Differentialquotienten selbst deshalb als substantielle oder lokale Größe betrachten und ihn dementsprechend durch körperbezogene oder raumbezogene Größen darstellen. Wir erhalten somit insgesamt acht verschiedene Ausdrücke, die wir im folgenden Abschnitt betrachten wollen. Zuvor seien nur noch einige allgemeine Beziehungen abgeleitet, die wir für diese Betrachtungen benötigen.

1) Die Geschwindigkeit des Körperpunktes gegenüber dem Raum ist durch

$$\frac{Dx^i}{dt} = v^i \tag{4}$$

definiert. Dabei ist v^i auf das raumfeste Koordinatensystem bezogen.

2) Es ist

$$\frac{\mathfrak{D}\,\xi^i}{dt} = -\bar{v}^i , \tag{5}$$

---

[1] Wir setzen hier voraus, daß alle physikalischen Größen als Tensoren definiert sind. Darin liegt keine Einschränkung der Allgemeinheit.

[2] An die Stelle der Zeit kann auch jeder andere Parameter treten, von dem der Ablauf des Vorganges eindeutig abhängt.

wobei $\bar{v}^i$ derselbe Vektor wie v^i ist. Seine Maßzahlen sind jedoch auf das körperfeste Koordinatensystem bezogen.

3) Bei der substantiellen Differentiation der Transformationsmatrizen erhalten wir zunächst unmittelbar

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right) = \underline{v^i}_{|m} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^k}. \tag{6}$$

Hier bezeichnet $\underline{v^i}_{|m}$ die kovariante Differentiation, die hier im raumfesten Koordinatensystem auszuführen ist, weil v^i raumbezogen ist. In der Einführung der kovarianten Ableitung in (6) kommt zum Ausdruck, daß wir die Änderungen von v^i auf dieselbe Basis beziehen, auf die auch v^i bezogen ist, nämlich auf die Grundvektoren im Punkte x^i, an dem sich der betrachtete Körperpunkt zur Zeit t befindet. Das ist folgerichtig, weil hier v^i raumbezogen ist. Führt man dagegen anstelle der kovarianten Ableitung den partiellen Differentialquotienten $\partial v^i/\partial x_m$ in (6) ein, so verfolgt man die Änderung der Maßzahlen von v^i, aber nicht unmittelbar die Änderung des Vektors selbst.

Zur Bestimmung von $\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right)$ gehen wir davon aus, daß

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial \xi^r} = \delta^i_r = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^m}\frac{\partial \xi^m}{\partial x^r}$$

ist. Die substantielle Differentiation des ersten Ausdruckes ergibt

$$\frac{\partial x^m}{\partial \xi^r}\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\right) + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial x^m}{\partial \xi^r}\right) = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\frac{\partial \xi^r}{\partial x^k}$, so erhalten wir

$$\frac{\partial \xi^r}{\partial x^k}\frac{\partial x^m}{\partial \xi^r}\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\right) + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}\frac{\partial \xi^r}{\partial x^k}\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial x^m}{\partial \xi^r}\right) = 0.$$

Daraus können wir nun leicht ablesen, daß

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right) = -\underline{v^m}_{|k}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \tag{7}$$

ist.

4) In ähnlicher Weise finden wir durch lokale Differentiation

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt}\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}\right) = -\underline{\bar{v}^i}_{|m}\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \tag{8}$$

und

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^k}\right) = \underline{\bar{v}^m}_{|k}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^m}. \tag{9}$$

Die kovarianten Differentiationen sind hier im körperfesten Koordinatensystem auszuführen.

5) Die Relationen

$$\underline{v^i}_{|m}\frac{\partial x^m}{\partial \xi^k} = \underline{\bar{v}^m}_{|k}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^m}, \qquad \underline{v^m}_{|k}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} = \underline{\bar{v}^i}_{|m}\frac{\partial \xi^m}{\partial x^k} \tag{10}$$

deren Gültigkeit mit Hilfe der allgemeinen Transformationsformeln (3) leicht nachzuweisen ist, zeigen, daß für die Transformationsmatrizen die Begriffe substantielle Differentiation und lokale Differentiation, so wie sie hier definiert sind, im Ergebnis zusammenfallen. Darin drückt sich aus, daß die Transformationsmatrizen ihrer Bedeutung nach stets sowohl dem raumfesten wie dem körperfesten Koordinatensystem zugehören. Wenn wir trotzdem im folgenden bei den durchzuführenden Differentiationen auch bei den Transformationsmatrizen die Unterscheidung in lokale und substantielle Größen beibehalten, so geschieht dies, um den jeweiligen Standpunkt zu kennzeichnen und die Einheitlichkeit der Betrachtung deutlich werden zu lassen.

c) Substantielle und lokale Differentialquotienten. Für eine auf das körperfeste Koordinatensystem bezogene Größe ist die substantielle Differentiation gleichbedeutend mit der partiellen Ableitung nach der Zeit (bei $\xi^i = \text{konst.}$):

$$\frac{D}{dt}\,\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \frac{\partial}{\partial t}\,\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\,. \tag{11}$$

Wir können diese Differentiation auch nach *Newton*scher Schreibart mit einem Punkt (˙) bezeichnen, da Verwechslungen nicht zu befürchten sind:

$$\left(\dot{\bar{a}}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\right) \equiv \frac{D}{dt}\,\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\,. \tag{12}$$

Das Gegenstück dazu ist die lokale Differentiation einer raumbezogenen Größe

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt}\,a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \frac{\partial}{\partial t}\,a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\,. \tag{13}$$

Die partielle Differentiation ist hier bei $x^i = \text{konst.}$ auszuführen. Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, können wir auch hier die *Newton*sche Schreibart anwenden

$$\left(\dot{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\right) \equiv \frac{\mathfrak{D}}{dt}\,a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\,. \tag{14}$$

Als substantielle Differentiation einer raumbezogenen Größe definieren wir

$$\frac{D}{dt}\,a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \frac{\mathfrak{D}}{dt}\,a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} + \underline{a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\big|_m}\,\frac{Dx^m}{dt} = \left(\dot{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\right) + v^m\,\underline{a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\big|_m}\,. \tag{15}$$

Diese Definition des substantiellen Differentialquotienten eines raumbezogenen Tensors führt wieder auf einen Tensor, weil die zeitliche Änderung folgerichtig auf die Grundvektoren am Ort x^i bezogen wird, an dem sich der Körperpunkt zur Zeit t befindet. Der für diesen substantiellen Differentialquotienten manchmal zu findende Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial t}\,a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} + v^m\,\frac{\partial}{\partial x^m}\,a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}$$

ist hingegen kein Tensor, weil in den zweiten Term hier auch die Änderung der Grundvektoren längs der Bahn des Körperpunktes eingeht, und weil darum dieser Ausdruck sich auf zwei verschiedene Raumpunkte bezieht, die um dx^i auseinanderliegen (vgl. hierzu auch Abschnitt 2.b).

Das Gegenstück zu Gleichung (15) bildet die lokale Differentiation einer auf das körperfeste Koordinatensystem bezogenen Größe

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt}\,\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \frac{D}{dt}\,\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} + \underline{\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\big|_m}\,\frac{\mathfrak{D}\xi^m}{dt} = \left(\dot{\bar{a}}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\right) - \bar{v}^m\,\underline{\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot}\big|_m}\,. \tag{16}$$

Wollen wir den substantiellen Differentialquotienten einer körperbezogenen Größe (Gleichung (11)) durch raumbezogene Größen ausdrücken, so haben wir

$$\frac{D}{dt}\,\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \frac{D}{dt}\left[a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\,\prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right)\prod_\beta{}'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right)\right]$$

zu bilden. Die Ausführung der Differentiationen auf der rechten Seite ergibt

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\,\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} &= \left[\frac{\mathfrak{D}}{dt}\,a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} + v^m\,\underline{a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\big|_m}\right]\prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right)\prod_\beta{}'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right) + a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\,\frac{D}{dt}\left[\prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right)\prod_\beta{}'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right)\right]\\ &= \left[\left(\dot{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\right) + v^m\,\underline{a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\big|_m}\right]\prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right)\prod_\beta{}'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right) - \sum_\lambda a^{\cdot r_\alpha \cdot r_\lambda \cdot}_{\cdot\cdot s_\beta \cdot\cdot}\,\underline{v^m\big|_{r_\lambda}}\,\frac{\partial \xi^{i_\lambda}}{\partial x^m}\prod_{\alpha \neq \lambda}\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right)\prod_\beta{}'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right)\\ &\quad + \sum_\lambda a^{\cdot\cdot r_\alpha \cdot\cdot}_{\cdot s_\beta \cdot s_\lambda}\,\underline{v^{s_\lambda}\big|_m}\,\frac{\partial x^m}{\partial \xi^{k_\lambda}}\prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right)\prod_{\beta \neq \lambda}{}'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right).\end{aligned}$$

Nach Vertauschung einiger Summationsindizes können wir dafür auch schreiben

$$\frac{D}{dt}\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \left[\left(\dot{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\right) + v^m \underline{a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}}\Big|_m - \sum_\lambda \underline{v^{r_\alpha = \lambda}}\Big|_{m_\lambda} a^{\cdot m_\lambda \cdot r_\alpha + \lambda \cdot}_{\cdot\cdot s_\beta \cdot\cdot} + \sum_\lambda \underline{v^{m_\lambda}}\Big|_{s_\beta = \lambda} a^{\cdot\cdot r_\alpha \cdot\cdot}_{\cdot m_\lambda \cdot s_\beta + \lambda \cdot}\right] \prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right). \tag{17}$$

In (17) ist der substantielle Differentialquotient einer körperbezogenen Größe durch raumbezogene Größen ausgedrückt[1]. Entsprechend können wir den lokalen Differentialquotienten einer raumbezogenen Größe [siehe Gleichung (13)] durch körperbezogene Größen ausdrücken. Das führt auf

$$\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{D}}{dt} a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} &= \frac{\mathfrak{D}}{dt}\left[\bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right)\right] = \left[\frac{D}{dt}\bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} - \bar{v}^m \underline{\bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}}\Big|_m\right] \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right) \\
&+ \bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \frac{\mathfrak{D}}{dt}\left[\prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right)\right] = \left[\left(\dot{\bar{a}}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\right) - \bar{v}^m \underline{\bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}}\Big|_m\right] \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right) \\
&+ \sum_\lambda \bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot r_\lambda \cdot}_{\cdot\cdot s_\beta \cdot\cdot} \underline{\bar{v}^m}\Big|_{r_\lambda} \frac{\partial x^{i_\lambda}}{\partial \xi^m} \prod_{\alpha \neq \lambda}'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right) \\
&- \sum_\lambda \bar{a}^{\cdot\cdot r_\alpha \cdot\cdot}_{\cdot s_\beta \cdot s_\lambda \cdot} \underline{\bar{v}^{s_\lambda}}\Big|_m \frac{\partial \xi^m}{\partial x^{k_\lambda}} \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_{\beta \neq \lambda}\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right).
\end{aligned}$$

Nach geeigneter Umordnung können wir dieses zusammenfassen zu

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt} a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \left[\left(\dot{\bar{a}}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\right) - \bar{v}^m \underline{\bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}}\Big|_m + \sum_\lambda \underline{\bar{v}^{r_\alpha = \lambda}}\Big|_{m_\lambda} \bar{a}^{\cdot m_\lambda \cdot r_\alpha + \lambda \cdot}_{\cdot\cdot s_\beta \cdot\cdot} - \sum_\lambda \underline{\bar{v}^{m_\lambda}}\Big|_{s_\beta = \lambda} \bar{a}^{\cdot\cdot r_\alpha \cdot\cdot}_{\cdot m_\lambda \cdot s_\beta + \lambda \cdot}\right] \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right). \tag{18}$$

Wir können ferner den substantiellen Differentialquotienten einer raumbezogenen Größe (Gleichung (15)) durch körperbezogene Größen darstellen. Dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{D}{dt} a^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \frac{D}{dt}\left[\bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{D}{dt}\bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right) + \bar{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \frac{D}{dt}\left[\prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right)\right] \\
&= \left[\left(\dot{\bar{a}}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\right) + \sum_\lambda \underline{\bar{v}^{r_\alpha = \lambda}}\Big|_{m_\lambda} \bar{a}^{\cdot m_\lambda \cdot r_\alpha + \lambda \cdot}_{\cdot\cdot s_\beta \cdot\cdot} - \sum_\lambda \underline{\bar{v}^{m_\lambda}}\Big|_{s_\beta = \lambda} \bar{a}^{\cdot\cdot r_\alpha \cdot\cdot}_{\cdot m_\lambda \cdot s_\beta + \lambda \cdot}\right] \prod_\alpha'\left(\frac{\partial x^{i_\alpha}}{\partial \xi^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta\left(\frac{\partial \xi^{s_\beta}}{\partial x^{k_\beta}}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Schließlich können wir den lokalen Differentialquotienten einer körperbezogenen Größe (Gleichung (16)) mit Hilfe von raumbezogenen Größen angeben. Das ergibt

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathfrak{D}}{dt}\bar{a}^{\cdot i_\alpha \cdot}_{\cdot k_\beta \cdot} = \frac{\mathfrak{D}}{dt}\left[a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right)\right] \\
&= \frac{\mathfrak{D}}{dt} a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right) + a^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot} \frac{\mathfrak{D}}{dt}\left[\prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right)\right] \\
&= \left[\left(\dot{a}^{\cdot r_\alpha \cdot}_{\cdot s_\beta \cdot}\right) - \sum_\lambda \underline{v^{r_\alpha = \lambda}}\Big|_{m_\lambda} a^{\cdot m_\lambda \cdot r_\alpha + \lambda \cdot}_{\cdot\cdot s_\beta \cdot\cdot} + \sum_\lambda \underline{v^{m_\lambda}}\Big|_{s_\beta = \lambda} a^{\cdot\cdot r_\alpha \cdot\cdot}_{\cdot m_\lambda \cdot s_\beta + \lambda \cdot}\right] \prod_\alpha\left(\frac{\partial \xi^{i_\alpha}}{\partial x^{r_\alpha}}\right) \prod_\beta'\left(\frac{\partial x^{s_\beta}}{\partial \xi^{k_\beta}}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

[1] *Oldroyd* und *Hill* nennen diesen Ausdruck a. a. O. „convected derivative", *Truesdell* a. a. O. dagegen „absolute time flux". Die von diesen Autoren angegebenen Ausdrücke sind nur insofern etwas spezieller, als sie voraussetzen, daß körperfestes und raumfestes Koordinatensystem zur betrachteten Zeit t gerade zusammenfallen.

d) Einige ergänzende Bemerkungen. Die in Abschnitt a) und c) zusammengestellten Beziehungen ermöglichen es, lokale Größen durch substantielle auszudrücken oder umgekehrt und damit die beiden Darstellungsweisen ineinander zu überführen. Die Ausdrücke lassen sich noch ein wenig umgestalten, wenn wir den Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes additiv in seinen symmetrischen und seinen antimetrischen Anteil, also in den Deformator (d^i_k) und in den Rotor ($\omega^i_{.k}$ bzw. $\omega^{.i}_k$) zerlegen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{v^i}|_k &= \frac{1}{2}\left(\underline{v^i}|_k + \underline{v_k}|^i\right) + \frac{1}{2}\left(\underline{v^i}|_k - \underline{v_k}|^i\right) \\ &= d^i_k \qquad\qquad + \omega^i_{.k} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

und entsprechend

$$\left.\begin{aligned} \underline{v_k}|^i &= \frac{1}{2}\left(\underline{v_k}|^i + \underline{v^i}|_k\right) + \frac{1}{2}\left(\underline{v_k}|^i - \underline{v^i}|_k\right) \\ &= d^i_k \qquad\qquad - \omega^i_{.k} \\ &= d^i_k \qquad\qquad + \omega^{.i}_k\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

In gleicher Weise erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \underline{\bar{v}^i}|_k &= \frac{1}{2}\left(\underline{\bar{v}^i}|_k + \underline{\bar{v}_k}|^i\right) + \frac{1}{2}\left(\underline{\bar{v}^i}|_k - \underline{\bar{v}_k}|^i\right) \\ &= \bar{d}^i_k \qquad\qquad + \bar{\omega}^i_{.k} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \underline{\bar{v}_k}|^i &= \bar{d}^i_k \qquad\qquad - \bar{\omega}^i_{.k} \\ &= \bar{d}^i_k \qquad\qquad + \bar{\omega}^{.i}_k\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Die Umschreibung der Formeln (17) bis (20) mit Hilfe dieser Beziehungen kann hier übergangen werden. Es werden sich später jedoch noch einige interessante Zusammenhänge ergeben.

Die Ausdrücke (16), (18) und (19), die zur körperbezogenen Darstellung gehören, scheinen bisher in allgemeinen Betrachtungen übergangen worden zu sein. Desgleichen ist anscheinend der Ausdruck (20), der zu (16) gehört, bisher ohne Beachtung geblieben. Dafür werden gelegentlich auch noch andere Differentialquotienten angegeben. Genannt seien hier:

1) „Intrinsic derivative"[1]. Hier werden die zeitlichen Änderungen auf ein Koordinatensystem bezogen, das an die Körperpunkte gebunden ist, aber nur die translatorischen Bewegungen der Körperpunkte mitmacht und nicht die Drehungen und Formänderungen des Körpers. Dieses Koordinatensystem ist im allgemeinen nichtholonom. Die Ableitung stimmt formal mit dem substantiellen Differentialquotienten einer raumbezogenen Größe überein, wenn das raumfeste Koordinatensystem zur Zeit t mit dem körperfesten zusammenfällt.

2) „Material derivative"[1, 2]. Die zeitlichen Änderungen werden hier in einem Koordinatensystem verfolgt, das die Translationen und die Drehungen der Körperpunkte mitmacht, aber nicht die Formänderungen des Körpers. Das — im allgemeinen ebenfalls nichtholonome — Koordinatensystem behält also während des Vorganges an jedem Punkte seine ursprüngliche Metrik (Maßtensor) bei. Diese Definition entspricht dem *Cosserat*schen Kontinuum[3].

Vom Standpunkt der phänomenologischen Kontinuumsmechanik erscheinen diese beiden Definitionen von Differentialquotienten als recht willkürlich. Sie werden deshalb hier nicht weiter verfolgt.

e) Integrationen über die Zeit. Für Integrationen über die Zeit gelten ähnliche Überlegungen wie für Differentiationen nach der Zeit. Wir können hierbei wiederum Integrationen

[1] vgl. *Oldroyd* und *Hill* a. a. O.
[2] *Truesdell* a. a. O. benutzt diesen Ausdruck abweichend von *Oldroyd* und *Hill* für die substantielle Differentiation einer raumbezogenen Größe.
[3] vgl. *Truesdell* a. a. O. und *W. Günther*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 10 (1958), S. 195.

bei festgehaltenem Körperpunkt ($\xi^i = \text{konst.}$), d. h. substantielle Integrationen und lokale Integrationen ($x^i = \text{konst.}$) unterscheiden. Außerdem können die Integranden körperbezogen oder raumbezogen sein, so daß wir in Analogie zur Differentiation vier verschiedene Integrale haben.

Der Unterschied zur Differentiation besteht darin, daß die Integrale einem Zeitintervall, die Differentialquotienten hingegen einem Zeitpunkt zugeordnet sind. Substantielle Integrationen über die Zeit können deshalb nicht durch lokale Integrationen über die Zeit ausgedrückt werden[1]. Unberührt von diesem Sachverhalt kann natürlich das Ergebnis der Integration stets wahlweise körperbezogen oder raumbezogen dargestellt werden, wenn man es einem bestimmten Zeitpunkt (z. B. der oberen Integrationsgrenze) zuordnet.

Die Integrationen über die Zeit sind wie gewöhnliche Integrale ausführbar, wenn bei substantiellen Integralen der Integrand körperbezogen und bei lokalen Integralen der Integrand raumbezogen ist. In diesem Falle benötigen wir auch für die substantielle und die lokale Integration keine unterschiedlichen Symbole (in Analogie zur *Newton*schen Schreibweise der Differentiation nach der Zeit). Eine solche Darstellung der Integranden ist aber auf Grund der in Abschnitt a) und c) zusammengestellten Beziehungen stets möglich. Die Ausführung substantieller und lokaler Integrationen über die Zeit bereitet deshalb keine grundsätzlichen Schwierigkeiten.

3. Beispiele. a) Verschiebung, Geschwindigkeit, Beschleunigung. Bei Einbeziehung endlicher Verschiebungen ist die analytische Definition der Verschiebungen an ein raumfestes Koordinatensystem gebunden, dessen Maßtensor im ganzen Raum konstant ist. Bezeichnen wir dieses Koordinatensystem mit X^i, so können wir die Verschiebungen definieren durch

$$U^i(\xi^k, t, t_0) = X^i(\xi^k, t) - X^i(\xi^k, t_0) \,. \tag{25}$$

Die Transformation auf beliebige andere raumfeste Koordinatensysteme x^i ergibt die allgemeine Definition der Verschiebungen

$$u^i(\xi^k, t, t_0) = [X^m(\xi^k, t) - X^m(\xi^k, t_0)] \frac{\partial x^i}{\partial X^m}(\xi^k, t) \,. \tag{26}$$

Damit ist die Verschiebung als substantielle, raumbezogene Größe eingeführt. Ihre Maßzahlen sind auf die Grundvektoren des Raumpunktes bezogen, an dem sich der Körperpunkt ξ^k zur Zeit t befindet. Die körperbezogene Darstellung wird durch

$$\bar{u}^i(\xi^k, t, t_0) = u^m(\xi^k, t, t_0) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m}(\xi^k, t) \tag{27}$$

vermittelt. Da x^i eine eindeutige Funktion von ξ^k und t ist, steht es uns ferner frei, die Verschiebungen auch als lokale Größen aufzufassen, indem wir

$$u^i = u^i(x^k, t, t_0) \quad \text{bzw.} \quad \bar{u}^i = \bar{u}^i(x^k, t, t_0) \tag{28}$$

setzen.

Die substantielle Differentiation der raumbezogenen Verschiebung ergibt[2]

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{dt} u^i(\xi^k, t, t_0) = \left[\frac{D}{dt} X^m(\xi^k, t)\right] \frac{\partial x^i}{\partial X^m}(\xi^k, t) = \frac{D}{dt} x^i(\xi^k, t) \\ = v^i(\xi^k, t) \quad \text{bzw.} \quad v^i(x^k, t) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

[1] Einem Körperpunkt ist in einem Zeitintervall eine stetige und dichte Folge von Raumpunkten zugeordnet und umgekehrt. Den Zusammenhang zwischen substantieller und lokaler Betrachtungsweise bei Integrationen über die Zeit vermitteln deshalb Linienintegrale, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll.

[2] Die Transformationsmatrix $\frac{\partial x^i}{\partial X^m}$ ist hier nicht mit zu differentiieren, weil wir definitionsgemäß die zeitliche Änderung eines Tensors auf dieselbe Basis beziehen wie den Tensor selbst.

oder nach (19) auch

$$\frac{D}{dt}\,u^i(\xi^k, t, t_0) = \left[\left(\dot{\bar{u}}^r\right) + \bar{v}^r\big|_m\,\bar{u}^m\right]\frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} = \bar{v}^r\,\frac{\partial x^i}{\partial \xi^r}\,, \tag{30}$$

wobei wir die rechte Seite nach Belieben als Funktion von ξ^k, t oder x^k, t auffassen können. Die lokale Differentiation der raumbezogenen Verschiebung führt dagegen auf

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt}\,u^i(x^k, t, t_0) = \left(\dot{u}^i\right) \tag{31}$$

bzw.

$$= \left[\left(\dot{\bar{u}}^r\right) - \bar{v}^m\,\bar{u}^r\big|_m + \bar{v}^r\big|_m\,\bar{u}^m\right]\frac{\partial x^i}{\partial \xi^r}\,. \tag{32}$$

Hier sind die rechten Seiten Funktionen von x^k (bzw. ξ^k), t und t_0. Die Ausdrücke (31) und (32) werden im übrigen nur für sehr spezielle Betrachtungen benötigt, z. B. etwa wenn die Herkunft der Körperpunkte untersucht werden soll, die an einem bestimmten Raumpunkt vorbeiwandern. Das Gegenstück dazu ist der lokale Differentialquotient nach der Zeit t_0

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt_0}\,u^i(x_k, t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t_0}\,u^i(x^k, t, t_0)\,, \tag{33}$$

der bei der Ermittlung der „Streichlinien" eine Rolle spielt.

Die zeitlichen Änderungen der körperbezogenen Verschiebung für sich allein zu verfolgen, ist physikalisch irrelevant und kann hier übergangen werden. Hierin kommt zum Ausdruck, daß die Verschiebung eine raumgebundene Größe ist, die deshalb auch raumbezogen einzuführen ist, wenn ihre zeitlichen Änderungen verfolgt werden sollen.

Auf eine andere Möglichkeit der räumlichen Zuordnung der Verschiebungen sei noch kurz hingewiesen. Wir können — im Gegensatz zu (28), wo u^i dem Raumpunkt x^k zugeordnet ist, den der Körperpunkt ξ^i zur Zeit t einnimmt — die Verschiebung auch dem Raumpunkt $\overset{\circ}{x}{}^k$ zuordnen, an dem der Körperpunkt zur Zeit t_0 war. Das führt zu einer anderen analytischen Definition der Verschiebung, nämlich auf

$$\overset{*}{u}{}^i(\overset{\circ}{x}{}^k, t) = [X^m(\overset{\circ}{x}{}^k, t) - X^m(\overset{\circ}{x}{}^k)]\,\frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial X^m}\,(\overset{\circ}{x}{}^k)\,. \tag{34}$$

Die Abhängigkeit von t_0 steckt hier implizit in $\overset{\circ}{x}{}^k$. Die lokale Differentiation ergibt bei dieser Zuordnung der Verschiebung

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{D}}{dt}\,\overset{*}{u}{}^i(\overset{\circ}{x}{}^k, t) &= \left[\frac{\partial}{\partial t}\,X^m(\overset{\circ}{x}{}^k, t)\right]\frac{\partial \overset{\circ}{x}{}^i}{\partial X^m}\,(\overset{\circ}{x}{}^k)\,,\\ &= \overset{*}{v}{}^i(\overset{\circ}{x}{}^k, t)\,.\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Die Geschwindigkeit $\overset{*}{v}{}^i$ ist hier wie $\overset{*}{u}{}^i$ auf die Grundvektoren des raumfesten Koordinatensystems im Punkte $\overset{\circ}{x}{}^k$ bezogen.

Der substantielle Differentialquotient verliert bei dieser Definition der Verschiebung seine selbständige Bedeutung; wir können ihn allenfalls formal dem lokalen Differentialquotienten gleichsetzen, weil $\overset{*}{u}{}^i$ stets zugleich einem festen Raumpunkt und einem festen Körperpunkt zugeordnet ist. Der Übergang zur körperbezogenen Darstellung wird im übrigen hier durch eine Abbildung und nicht durch eine Transformation vermittelt, weil bei dieser Betrachtungsweise einander entsprechende Raum- und Körperpunkte im allgemeinen nur zur Zeit t_0 räumlich zusammenfallen. Die dazugehörigen Überlegungen laufen infolgedessen ein wenig anders als die allgemeinen Betrachtungen in Ziff. 2. Diese Gedankengänge sollen hier jedoch nicht weiter verfolgt werden, weil der Begriff der „Abbildung" seiner Natur nach mehr für den Vergleich zweier Zustände als für die Verfolgung eines Vorganges geeignet erscheint.

Die Geschwindigkeit ist durch

$$v^i = \frac{D}{dt} x^i \tag{36}$$

definiert und kann als substantielle Größe $v^i(\xi^k, t)$ oder als lokale Größe $v^i(x^k, t)$ betrachtet werden [vgl. Gleichung (29)]. Die körperbezogene Darstellung ist durch

$$\bar{v}^i = v^m \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \tag{37}$$

gegeben. Bei der Verfolgung der zeitlichen Änderungen ist jedoch von der raumbezogenen Darstellung auszugehen, wenn die Betrachtung physikalisch sinnvoll sein soll, weil die Geschwindigkeit eine raumgebundene Größe ist. Wir erhalten somit folgende Ausdrücke:

$$\frac{D}{dt} v^i = \left(\dot{v}^i\right) + v^m \underline{v^i}_{|m} \tag{38}$$

$$= \left[\left(\dot{\bar{v}}^r\right) + \underline{\bar{v}^r}_{|m} \bar{v}^m\right] \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \tag{39}$$

und

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt} v^i = \left(\dot{v}^i\right), \tag{40}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \left[\left(\dot{\bar{v}}^r\right) - \bar{v}^m \underline{\bar{v}^r}_{|m} + \underline{\bar{v}^r}_{|m} \bar{v}^m\right] \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r}, \\ &= \left(\dot{\bar{v}}^r\right) \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Die linke Seite der Gleichungen (38) und (39) können wir als Definition der Beschleunigung betrachten

$$b^i = \frac{D^2}{dt^2} x^i = \frac{D}{dt} v^i. \tag{42}$$

Die Gleichungen (40) und (41) beschreiben dagegen die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes. Die genaue, formale Entsprechung der raumbezogenen und der körperbezogenen Darstellung tritt im übrigen nur bei der Verfolgung des Geschwindigkeitsverlaufes auf, und dort auch nur, wenn die Geschwindigkeit kontravariant definiert ist. Die Entsprechung ist also keine allgemeine Eigenschaft.

b) Spannungen. Es liegt im allgemeinen nahe, die Spannungen dem Körper zuzuordnen und sie deshalb körperbezogen einzuführen: $\bar{\sigma}^{ik}$, $\bar{\sigma}^i_k$ oder $\bar{\sigma}_{ik}$. Wir wollen uns hier der gemischtvarianten Schreibweise bedienen, die verschiedene Vorzüge hat. Die substantielle Differentiation dieses Tensors ergibt

$$\frac{D}{dt} \bar{\sigma}^i_k = \left(\dot{\bar{\sigma}}^i_k\right), \tag{43}$$

$$= \left[\left(\dot{\sigma}^r_s\right) + v^m \underline{\sigma^r_s}_{|m} - \underline{v^r}_{|m} \sigma^m_s + \underline{v^m}_{|s} \sigma^r_m\right] \frac{\partial \xi^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}. \tag{44}$$

Bleiben die beim Vorgang eintretenden Zustandsänderungen ohne Rückwirkungen auf den Vorgang wie bei inkompressiblen, viskosen oder ideal-plastischen Medien, oder ist der Vorgang stationär im Raum, so kann es zweckmäßig sein, die Spannungen den Raumpunkten zuzuordnen und sie deshalb raumbezogen darzustellen (σ^i_k). Die lokale Differentiation ergibt dann

$$\frac{\mathfrak{D}}{dt} \sigma^i_k = \left(\dot{\sigma}^i_k\right), \tag{45}$$

$$= \left[\left(\dot{\bar{\sigma}}^r_s\right) - \bar{v}^m \underline{\bar{\sigma}^r_s}_{|m} + \underline{\bar{v}^r}_{|m} \bar{\sigma}^m_s - \underline{\bar{v}^m}_{|s} \bar{\sigma}^r_m\right] \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k}. \tag{46}$$

Wesentlich seltener wird es vorkommen, daß die lokalen Änderungen des körperbezogenen Spannungstensors oder die substantiellen Änderungen des raumbezogenen Spannungstensors verfolgt werden müssen. Deshalb können diese Differentialquotienten hier übergangen werden, zumal die hierbei möglichen Darstellungen aus den allgemeinen Betrachtungen in Ziff. **2** c) sofort abgelesen werden können.

Diese kurzen Ausführungen zeigen, daß bei raumungebundenen Größen raumbezogene und körperbezogene Darstellung grundsätzlich gleichberechtigt nebeneinander stehen. Es hängt vom Einzelfall ab, in welcher Weise man solche Größen am zweckmäßigsten einführt.

c) Formänderungen. Betrachten wir die Lage des körperfesten Koordinatensystems im Raume zu zwei verschiedenen Zeitpunkten (t_0 und t), so wird der Übergang von der Ausgangslage (Zeit t_0) zur Endlage (Zeit t) durch einen Abbildungstensor vermittelt, der auf das raumfeste Koordinatensystem bezogen ist. Diesen Abbildungstensor können wir auf zwei Weisen multiplikativ in einen symmetrischen Dehnungstensor und in einen antimetrischen Versor aufspalten, je nachdem, ob wir uns

1) die Drehung vor der Dehnung oder

2) die Dehnung vor der Drehung

ausgeführt denken[1]. Bilden wir das Quadrat des Dehnungstensors und transformieren wir diesen quadratischen Dehnungstensor im Falle 1) auf das körperfeste Koordinatensystem zur Zeit t, so erhalten wir bei gemischt-varianter Darstellung

$$\bar{q}_k^i = \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{ir}\, \bar{g}_{rk}\,. \tag{47}$$

Hierbei ist $\overset{\circ}{\bar{g}}{}^{ir}$ der kontravariante Maßtensor des körperfesten Koordinatensystems zur Zeit t_0 und g_{rk} der kovariante zur Zeit t. Ein geeignetes Maß für die Formänderungen gewinnen wir, wenn wir den Logarithmus der Wurzel[2] des quadratischen Formänderungstensors bilden:

$$\bar{\varepsilon}_k^i = \left(\ln \sqrt{\bar{q}}\right)_k^i = \frac{1}{2}\left(\ln \bar{q}\right)_k^i. \tag{48}$$

Der Gedanke, einen solchen Tensor einzuführen, geht auf *Hencky*[3] zurück. Seine Vorteile hat besonders *Richter*[4] herausgestellt.

Zu formal gleichen Größen kommen wir, wenn wir bei Interpretation 2) den quadratischen Dehnungstensor auf das körperfeste Koordinatensystem zur Zeit t_0 transformieren. Dieses Koordinatensystem können wir als einen Sonderfall des raumfesten Koordinatensystems ansehen, weil seine Lage im Raum unabhängig von t ist, und wir wollen es mit $\overset{\circ}{x}{}^i$ bezeichnen. Wir erhalten in diesem Falle

$$\overset{\circ}{\bar{q}}{}_k^i = \overset{\circ}{\bar{g}}{}^{ir}\, \bar{g}_{rk} \tag{49}$$

und

$$\overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}{}_k^i = \frac{1}{2}\left(\ln \overset{\circ}{\bar{q}}\right)_k^i. \tag{50}$$

Hier sind $\overset{\circ}{\bar{q}}{}_k^i$ und $\overset{\circ}{\bar{\varepsilon}}{}_k^i$ den Raumpunkten zugeordnet, die die Körperpunkte zur Zeit t_0 einnahmen. Der Übergang zur körperbezogenen Darstellung dieser Größen führt wieder über Abbildungen. Diesen Weg wollen wir aber nicht weiter verfolgen, sondern wir gehen hier von dem körperbezogenen logarithmischen Formänderungstensor (48) aus, den wir natürlich auch raumbezogen darstellen können:

$$\varepsilon_k^i = \bar{\varepsilon}_s^r \frac{\partial x^i}{\partial \xi^r} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^k}\,. \tag{51}$$

---

[1] Einzelheiten dieser Gedankengänge s. bei *Lehmann*, Einige Betrachtungen zu den Grundlagen der Umformtechnik, Ing.-Arch. 29 (1960) S. 1.

[2] Logarithmus und Wurzel sind hier als Matrizenfunktionen zu verstehen. Für solche Funktionen wollen wir die Schreibweise $\left(\ln \bar{q}\right)_k^i$, $\left(\bar{q}^{-1}\right)_k^i$ usw. benutzen.

[3] *H. Hencky*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 144.

[4] *H. Richter*, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 65.

Der substantielle Differentialquotient des körperbezogenen logarithmischen Formänderungstensors ist

$$\frac{D}{dt}\,\bar{\varepsilon}^i_k = \left(\dot{\bar{\varepsilon}}^i_k\right), \tag{52}$$

$$= \left[\left(\dot{\varepsilon}^r_s\right) + v^m\,\underline{\varepsilon^r_s}_{|m} - \underline{v^r}_{|m}\,\varepsilon^m_s + \underline{v^m}_{|s}\,\varepsilon^m_r\right]\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}\,. \tag{53}$$

Führen wir die Differentiation auf der rechten Seite von (52) aus, so erhalten wir unter Berücksichtigung, daß $\bar{q}^i_k$ ein symmetrischer Tensor ist,

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}\,\bar{\varepsilon}^i_k &= \frac{D}{dt}\,\frac{1}{2}\,(\ln \bar{q})^i_k\,,\\ &= \frac{1}{2}\,\left(\bar{q}^{-1}\right)^i_m\,\frac{D}{dt}\,\bar{q}^m_k\,,\\ &= \frac{1}{2}\,\bar{g}^{is}\,\overset{\circ}{\bar{g}}_{sm}\,\frac{D}{dt}\left(\overset{\circ}{\bar{g}}^{mr}\,\bar{g}_{rk}\right) = \frac{1}{2}\,\bar{g}^{ir}\,\frac{D}{dt}\,\bar{g}_{rk}\,.\end{aligned}$$

Das ergibt, wie man sofort zeigen kann, wenn man mit Hilfe von (17) $D\bar{g}_{rk}/dt$ in einem raumfesten Koordinatensystem ausdrückt, das zur Zeit t mit dem körperfesten zusammenfällt,

$$\frac{D}{dt}\,\bar{\varepsilon}^i_k = \frac{1}{2}\,\bar{g}^{ir}\left(\underline{\bar{v}_r}_{|k} + \underline{\bar{v}_k}_{|r}\right) = \frac{1}{2}\left(\underline{\bar{v}^i}_{|k} + \underline{\bar{v}_k}_{|i}\right). \tag{54}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit den Gleichungen (23) und (24), so finden wir, daß

$$\frac{D}{dt}\,\bar{\varepsilon}^i_k = \bar{d}^i_k \tag{55}$$

ist, daß also bei gemischt-varianter Darstellung der substantielle Differentialquotient des körperbezogenen, logarithmischen Formänderungstensors gleich dem körperbezogenen Deformator des Geschwindigkeitsfeldes ist. Wir können aber auch schreiben

$$\frac{D}{dt}\,\bar{\varepsilon}^i_k = \frac{1}{2}\left(\underline{v^r}_{|s} + \underline{v_s}_{|}{}^r\right)\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}\,, \tag{56}$$

$$= d^r_s\,\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r}\,\frac{\partial x^s}{\partial \xi^k}\,. \tag{57}$$

Fallen insbesondere zur Zeit t das körperfeste und das raumfeste Koordinatensystem zusammen so wird

$$\frac{D}{dt}\,\bar{\varepsilon}^i_k = d^i_k\,, \tag{58}$$

also gleich dem raumbezogenen Deformator des Geschwindigkeitsfeldes. Dieser überaus einfache Zusammenhang ist eine besondere Eigenschaft des hier eingeführten Formänderungstensors. Er gilt im übrigen nur für die gemischt-variante Darstellung von logarithmischem Formänderungstensor und Deformator des Geschwindigkeitsfeldes; denn die substantielle Differentiation des kovarianten, körperbezogenen Formänderungstensors ergibt z. B.

$$\left.\begin{aligned}\frac{D}{dt}\,\bar{\varepsilon}_{ik} &= \frac{D}{dt}\,(\bar{g}_{ir}\,\bar{\varepsilon}^r_i)\,,\\ &= \left(\underline{\bar{v}_i}_{|r} + \underline{v_r}_{|i}\right)\bar{\varepsilon}^r_k + \frac{1}{2}\,\bar{g}_{ir}\left(\underline{\bar{v}^r}_{|k} + \underline{\bar{v}_k}_{|r}\right),\\ &= 2\,\bar{d}_{ir}\,\bar{\varepsilon}^r_k + \bar{d}_{ik}\,,\\ &= \bar{d}_{ir}\left(2\,\bar{\varepsilon}^r_k + \delta^r_k\right).\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Die substantielle Integration des kovarianten, körperbezogenen Deformators führt hingegen auf

$$\int_{t_0}^{t} \bar{d}_{ik}\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{D}{dt}\,\bar{g}_{ik}\,dt = \frac{1}{2}\left(\bar{g}_{ik} - \overset{\circ}{\bar{g}}_{ik}\right). \tag{60}$$

Der Ausdruck $\frac{1}{2}\left(\bar{g}_{ik} - \overset{\circ}{\bar{g}}_{ik}\right)$ kann nicht unmittelbar als ein kovarianter Formänderungstensor gedeutet werden. Die Maßtensoren $\bar{g}_{ik}$ und $\overset{\circ}{\bar{g}}_{ik}$ gehören zwar zum gleichen körperfesten Koordinatensystem, aber zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. Transformationen auf andere räumliche Bezugssysteme sind deshalb nicht ohne weiteres durchführbar. Erst dadurch, daß wir „per definitionem" diesen Ausdruck einem Koordinatensystem (dem körperfesten zur Zeit t_0 oder dem körperfesten zur Zeit t) zuordnen, wird ein Tensor im üblichen Sinne[1] daraus, wobei natürlich je nach der Zuordnung zwei verschiedene Tensoren entstehen. Der Zusammenhang dieser Tensoren mit dem logarithmischen Formänderungstensor ist in folgender Weise gegeben. Die Überführung in die gemischt-variante Form ergibt in dem einen Falle

$$\frac{1}{2}\,\overset{\circ}{\bar{g}}{}^{ri}\left(\bar{g}_{ik} - \overset{\circ}{\bar{g}}_{ik}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{\bar{g}}{}^{ri}\,\bar{g}_{ik} - \delta^r_k\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{q}{}^r_k - \delta^r_k\right) \tag{61}$$

und im anderen Falle

$$\frac{1}{2}\,\bar{g}^{ri}\left(\bar{g}_{ik} - \overset{\circ}{\bar{g}}_{ik}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta^r_k - \bar{g}^{ri}\,\overset{\circ}{\bar{g}}_{ik}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta^r_k - (\bar{q}^{-1})^r_k\right). \tag{62}$$

Die rechte Seite von (61) läßt sich als das erste Glied der Reihenentwicklung von

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^r_k = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\overset{\circ}{q} - \delta + \delta\right)\right)^r_k$$

deuten, die rechte Seite von (62) dagegen als das erste Glied der Reihe von

$$\bar{\varepsilon}^r_k = \frac{1}{2}\,(\ln \bar{q})^r_k = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(\bar{q}^{-1} - \delta + \delta\right)\right)^r_k.$$

Der kontravariante, körperbezogene Deformator hängt mit dem Maßtensor des körperfesten Koordinatensystems durch folgende Beziehung zusammen:

$$\frac{1}{2}\,\frac{D}{dt}\,\bar{g}^{ik} = -\,\bar{d}^{ik}. \tag{63}$$

Das läßt sich wiederum mit Hilfe von (17) zeigen, wenn raumfestes und körperfestes Koordinatensystem zur Zeit t zusammenfallen. An diesen Zusammenhang lassen sich ähnliche Betrachtungen wie an Gleichung (60) anschließen. Diese können hier übergangen werden. Wir wollen aber festhalten, daß bei körperbezogenen Größen zeitliche Differentiation (bzw. Integration) und Heben bzw. Senken eines Indexes im allg. nicht miteinander vertauschbar sind. Anmerken wollen wir ferner, daß bei körperbezogenen Größen kovariante Differentiation nach den Körperkoordinaten und zeitliche Differentiation (bzw. Integration) im allgemeinen nicht miteinander vertauscht werden können. Beide Erscheinungen sind dadurch bedingt, daß im allgemeinen

$$\frac{D}{dt}\,\bar{g}_{ik} = \frac{\mathfrak{D}}{dt}\,\bar{g}_{ik} \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{D}{dt}\,\bar{g}^{ik} = \frac{\mathfrak{D}}{dt}\,\bar{g}^{ik} \neq 0$$

ist [siehe Gleichung (60) bzw. (63)]. Bei raumbezogenen Größen bleibt hingegen, sofern das räumliche Bezugssystem starr ist und die sonstigen Voraussetzungen gegeben sind, die Vertauschbarkeit erhalten.

Die bei *Truesdell*[2] angegebenen Definitionen des Formänderungstensors (*Cauchy-Green*, *Green-St. Venant*, *Alamansi-Hamel*) sind raumbezogen eingeführt. In der einen Version wird der Formänderungstensor den Raumpunkten zugeordnet, an denen sich die Körperpunkte zur Zeit t_0 befanden, in der anderen Version den Raumpunkten, die die Körperpunkte zur Zeit t einnehmen. Wir wollen hier nur auf die zweite Version, die uns im Rahmen dieser Ausführungen näher liegt, kurz eingehen. In ihr nimmt mit unserer Bezeichnungsweise der *Cauchy-Green*sche Formänderungstensor (von *Truesdell* so genannt) die Form

$$c_{ik} = \overset{\circ}{\bar{g}}_{rs}\,\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i}\,\frac{\partial \xi^s}{\partial x^k} \tag{64}$$

[1] In dieser Form wird der Formänderungstensor, allerdings auf einem anderen Wege, von *A. E. Green* und *W. Zerna* Theoretical Elasticity, Oxford 1954, eingeführt.

[2] a. a. O.

an. Der körperbezogene *Cauchy-Green*sche Formänderungstensor ist dagegen

$$\bar{c}_{ik} = \overset{\circ}{g}_{rs} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^m} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^n} \frac{\partial x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^k} = \overset{\circ}{g}_{ik} , \tag{65}$$

und infolgedessen ist

$$\frac{D}{dt} \bar{c}_{ik} = 0 . \tag{66}$$

Die substantielle Differentiation des raumbezogenen Tensors ergibt

$$\frac{D}{dt} c_{ik} = -\left(c_{mk} \underline{v^m}_{|i} + c_{im} \underline{v^m}_{|k} \right) , \tag{67}$$

wie wir sofort durch Anwendung von (19) ableiten können. Dieser Ausdruck zeigt keinen einfachen Zusammenhang mit dem Deformator des Geschwindigkeitsfeldes. Darum ist, wie auch (66) zeigt, dieser Tensor nicht sehr glücklich definiert. Überführen wir hingegen den gemischt-varianten Formänderungstensor von *Alamansi* und *Hamel*, der bei *Truesdell* in der Form

$$e^i_k = \delta^i_k - c^i_k \tag{68}$$

angegeben ist, in die körperbezogene Darstellung, so finden wir

$$\bar{e}^i_k = \delta^i_k - \bar{g}^{ir} \overset{\circ}{g}_{rk} , \tag{69}$$

also wieder den Ausdruck (62), der das erste Glied der Reihenentwicklung von $\bar{\varepsilon}^i_k$ darstellt.

Da bei den von *Truesdell* angegebenen Formänderungstensoren kein einfacher Zusammenhang zwischen dem substantiellen Differentialquotienten und dem Deformator des Geschwindigkeitsfeldes besteht, unterscheidet er die Begriffe „rate of deformation" (entspricht dem Deformator des Geschwindigkeitsfeldes) und „rate of strain" (entspricht dem substantiellen Differentialquotienten des Formänderungstensors). Diese Begriffe fallen jedoch in ihrer Bedeutung genau zusammen, sofern nur der Formänderungstensor in geeigneter Weise definiert wird. Insbesondere gilt dies für den gemischt-varianten logarithmischen Formänderungstensor, dessen weitere Vorzüge (eindeutige additive Aufspaltungsmöglichkeit in Volumendilatation und Formänderungsdeviator, lineares Superpositionsgesetz, Invarianz bei affiner Abbildung) ihn für allgemeine Betrachtungen besonders geeignet machen.

Die Verfolgung lokaler Änderungen des Formänderungstensors können wir hier übergehen. Sie bereitet auf Grund der vorausgegangenen Betrachtungen keine Schwierigkeiten. Meist wird man auch dabei vom körperbezogenen Formänderungstensor ausgehen, weil dies aus physikalischen Gründen näher liegt. Bei den Formänderungsgeschwindigkeiten kommt es dagegen wieder sehr auf den Einzelfall an, ob die körperbezogene oder raumbezogene Darstellung vorzuziehen ist.

Abschließend sollen nur noch zwei Beziehungen hervorgehoben werden, die sich mit Hilfe des logarithmischen Formänderungstensors ebenfalls besonders einfach formulieren lassen. Für die Formänderungsarbeit eines Massenelementes mit der Dichte ϱ erhalten wir

$$a = \int_{t_0}^{t} \frac{\bar{\sigma}^k_i}{\varrho} \bar{d}^i_k \, dt = \int_{\bar{0}}^{\bar{\varepsilon}^i_k} \frac{\bar{\sigma}^k_i}{\varrho} D \, \bar{\varepsilon}^i_k . \tag{70}$$

Die Kompatibilitätsbedingungen für die Formänderungsgeschwindigkeiten können wir schließlich in der Form

$$\underline{\left(\dot{\bar{\varepsilon}}^i_k\right)|^l_m} + \underline{\left(\dot{\bar{\varepsilon}}^l_m\right)|^i_k} - \underline{\left(\dot{\bar{\varepsilon}}^i_m\right)|^l_k} - \underline{\left(\dot{\bar{\varepsilon}}^l_k\right)|^i_m} = 0 \tag{71}$$

schreiben. Das ist gleichbedeutend mit

$$\underline{\bar{d}^i_k|^l_m} + \underline{\bar{d}^l_m|^i_k} - \underline{\bar{d}^i_m|^l_k} - \underline{\bar{d}^l_k|^i_m} = 0 \tag{72}$$

und läßt sich in dieser Form durch Ausschreiben sofort nachprüfen. Es ergeben sich damit bemerkenswerte Analogien zur Theorie infinitesimaler Formänderungen[1]. Für den Formänderungs-

[1] vgl. z. B. *H. Schaefer*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953), S. 356.

tensor $\bar{\varepsilon}^i_k$ selbst sind die Kompatibilitätsbedingungen sehr viel komplizierter. Sie können nicht unmittelbar durch Integration der Gleichungen (71) über die Zeit gewonnen werden, weil zeitliche Integration und kovariante Differentiationen bei körperbezogenen Größen nicht miteinander vertauschbar sind.

4. Schlußbemerkungen. Bei der Beschreibung von Vorgängen in einem Kontinuum wird weitgehend von der *Euler*schen Betrachtungsweise Gebrauch gemacht. In neuerer Zeit werden aber in zunehmendem Maße auch Fragen aufgegriffen, deren Beantwortung eine Verfolgung des Vorganges am Körperelement erforderlich macht. Damit rückt die *Lagrange*sche Betrachtungsweise wieder mehr in das Blickfeld. Die gegenseitigen Beziehungen zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen wurden hier zusammengestellt. Dabei sollte gleichzeitig gezeigt werden, daß die körperbezogene Darstellung die *Lagrange*sche Betrachtungsweise wesentlich vereinfachen kann, und daß die Zusammenhänge sehr viel durchsichtiger werden, wenn man bei Definitionen und Darstellung immer den physikalischen Sachverhalt im Auge behält.

(Eingegangen am 30. November 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dr.-Ing. *Th. Lehmann*, Hannover, Podbielskistraße 93

Ausweitung des kreiszylindrischen Hohlraumes unter örtlichem Innendruck

Von E. Tremmel

1. Einleitung und Problemstellung. Spannungen und Verschiebungen eines allseitig ins Unendliche erstreckten, elastisch-isotropen Körpers mit einer durchgehenden, unter konstantem Innendruck p stehenden kreiszylindrischen Öffnung vom Querschnittshalbmesser a sind durch die *Airy*sche Spannungsfunktion

$$F = -p\,a^2 \ln r \tag{1}$$

bestimmt. Für die Radialverschiebungen u des Zylindermantels erhält man hier den einfachen Ausdruck

$$u = \frac{p}{2G}\,a\,, \tag{2}$$

in dem G den Schubmodul bezeichnet, der mit dem Elastizitätsmodul E und der Querzahl ν durch die bekannte Beziehung $G = E/2\,(1+\nu)$ verbunden ist. Wirkt der Innendruck dagegen nur örtlich, etwa über die in der Achsrichtung z des Hohlzylinders gemessene Länge $2c$ (Abb. 1), wie z. B. beim Abpressen von Probestrecken in Stollen und Schächten[1], so liegt ein rotationssymmetrisches Problem vor, bei dem die von r und z abhängigen Spannungs- und Verschiebungskomponenten aus einer *Love*schen Verschiebungsfunktion abgeleitet werden können.

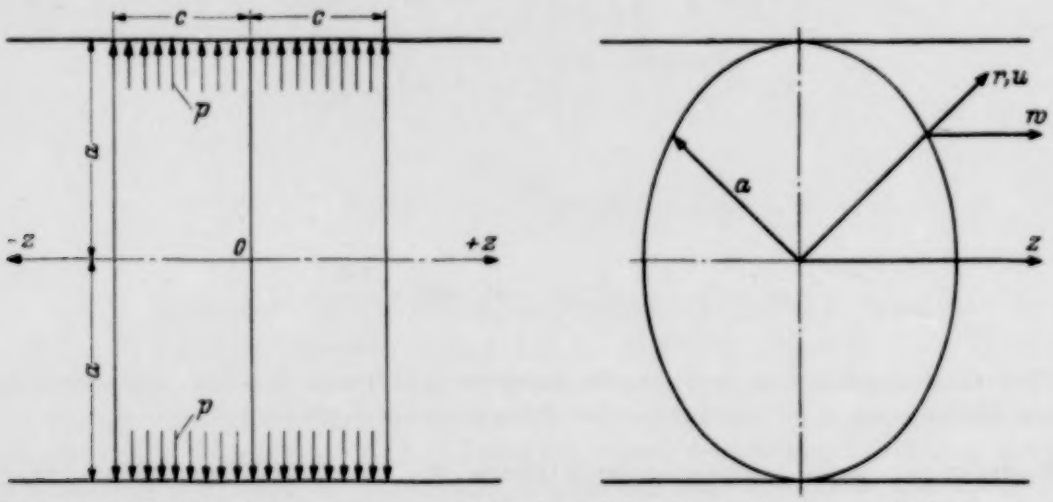

Abb. 1. Kreiszylindrischer Hohlraum unter örtlichem hydrostatischem Druck; Koordinaten und Bezeichnungen.

Eine Näherungslösung für diesen Fall hat *H. M. Westergaard*[2] angegeben, während die exakte Lösung, d. h. die den hier vorliegenden Randbedingungen genügende *Love*sche Verschiebungsfunktion von *C. J. Tranter*[3] berechnet wurde. In der zitierten Arbeit stellt *Tranter* ferner die allgemeinen Ausdrücke für die Spannungen und Verschiebungen auf und bestimmt die Größe der im Symmetriequerschnitt auftretenden Radialverschiebung des Zylindermantels unter Verwendung eines numerischen Verfahrens. Den Fall einer auf den zylindrischen Hohlraum wirkenden konstanten, einseitig ins Unendliche erstreckten rotationssymmetrischen Druckverteilung behandelt *O. L. Bowie*[4], ohne jedoch auf die Verschiebungen einzugehen.

Schließlich seien in diesem Zusammenhang noch die Arbeiten von *L. Föppl*[5] und *A. W. Rankin*[6] genannt, in denen das verwandte Problem des unter rotationssymmetrischen Druckverteilungen stehenden, unendlich langen Vollzylinders untersucht wird.

[1] *H. Lauffer*, Geologie und Bauwesen 25 (1959) S. 114.
[2] *H. M. Westergaard*, Kármán Anniversary Volume, 1941, S. 154.
[3] *C. J. Tranter*, Quart. Applied Math., 4, (1946) S. 298.
[4] *O. L. Bowie*, Quart. Applied Math., 5, (1947) S. 100.
[5] *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 2, S. 168 ff., München 1928.
[6] *A. W. Rankin*, J. Appl. Mech. 11, A 77 (1944).

Wir werden im folgenden zunächst die *Love*sche Verschiebungsfunktion für den unter örtlichem Innendruck stehenden zylindrischen Hohlraum ableiten, wobei wir im wesentlichen auf die oben zitierte Veröffentlichung von *C. J. Tranter* zurückgreifen können. Bei der Berechnung der Radialverschiebungen des Zylindermantels werden wir uns jedoch nicht auf die numerische Ermittlung der Funktionswerte für bestimmte ausgezeichnete Querschnitte beschränken, sondern allgemeine Beziehungen für den Gesamtverlauf entwickeln. Aus einem Grenzübergang wird schließlich der von einer im Querschnitt $z = 0$ konzentrierten Druckverteilung bewirkte Verlauf der Radialverschiebungen, d. h. die Einflußfunktion erhalten, mit der die Ausweitung des Zylindermantels für beliebige rotationssymmetrische Belastungen berechnet werden kann.

2. Berechnung der Loveschen Verschiebungsfunktion. Die *Love*sche Verschiebungsfunktion Φ genügt der Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta\Phi = 0\,, \tag{3}$$

in der

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4}$$

den Laplaceschen Operator darstellt; Spannungen und Verschiebungen sind mit Φ durch die nachstehenden Beziehungen verknüpft[1] (Abb. 1):

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right], \tag{5}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\,\Delta\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right], \tag{6}$$

$$\sigma_z = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right], \tag{7}$$

$$\tau_{rz} = \frac{2G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right], \tag{8}$$

und

$$u = -\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}, \tag{9}$$

$$w = \frac{1}{1-2\nu}\left[2(1-\nu)\,\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]. \tag{10}$$

Die für den vorliegenden Fall in Betracht kommende Lösung der Bipotentialgleichung (3) hat den folgenden Bedingungen zu genügen: Am Zylindermantel müssen

1) die Radialspannungen entgegengesetzt gleich der gegebenen Innendruckverteilung sein:

$$-\sigma_r = \begin{cases} p & \text{für} \quad r = a \quad \text{und} \quad \begin{cases} -c < z < +c \\ z < -c \ \text{ und } \ z > +c\,; \end{cases} \\ 0 \end{cases} \tag{11}$$

2) die Schubspannungen identisch in z verschwinden:

$$\tau_{rz} = 0 \ \text{ für } \ r = a \ \text{ und } \ -\infty < z < +\infty\,. \tag{12}$$

Schließlich besteht die Forderung, daß

3) sämtliche Spannungs- und Verschiebungskomponenten im Unendlichen beschränkt bleiben, also

$$\lim_{x_j \to \infty} \sigma_{ik} \neq \infty\,, \tag{13a}$$

$$\lim_{x_j \to \infty} u_i \neq \infty \tag{13b}$$

gelten muß, wobei hier $i, j, k = 1, 2$ allgemein anstelle der Koordinaten $x_1 = r$ und $x_2 = z$ geschrieben ist.

[1] Siehe etwa *C. B. Biezeno-R. Grammel*, Technische Dynamik I, S. 116, Berlin 1953.

Zur Bestimmung der *Love*schen Verschiebungsfunktion Φ gehen wir zunächst von der Randbedingung (11) aus und stellen die am Zylindermantel wirkende Belastung durch ein Fouriersches Integral dar, das für die durch (11) definierte, in $\pm c$ unstetige Funktion bekanntlich durch

$$-\sigma_r \equiv p = \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha c}{\alpha} \cos \alpha z \, d\alpha \tag{14}$$

gegeben ist. Wir werden daher auch die gesuchte *Love*sche Verschiebungsfunktion in Form eines uneigentlichen Integrals mit der Integrationsvariablen α einzuführen haben. Da σ_r gemäß (5) durch eine ungerade Ableitung nach z mit Φ verbunden ist, muß Φ demnach in der Form

$$\Phi = \int_0^\infty \varphi(\alpha) \, L(\alpha, r) \sin \alpha z \, d\alpha \tag{15}$$

angesetzt werden, wobei $L(\alpha, r) \sin \alpha z$ eine den Bedingungen (11), (12) und (13) genügende Lösung der Bipotentialgleichung ist; über die nur von α abhängige Funktion $\varphi(\alpha)$ wird noch verfügt werden.

Führen wir den Ansatz (15) in (3) ein, so ergibt sich nach Kürzen von $\sin \alpha z$ für $L(\alpha, r)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha^2\right)\left(\frac{d^2L}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dL}{dr} - \alpha^2 L\right) = 0 \,, \tag{16}$$

deren allgemeine Lösung bekanntlich durch

$$L = C_1 \, I_0(\alpha r) + C_2 \, r \, I_1(\alpha r) + C_3 \, K_0(\alpha r) + C_4 \, r \, K_1(\alpha r) \tag{17}$$

gegeben ist. Hierin bedeuten I_0, I_1 bzw. K_0, K_1 modifizierte Besselfunktionen erster bzw. zweiter Art (letztere auch *Macdonald*sche Funktionen genannt), nullter und erster Ordnung, die für die Ordnung n allgemein durch

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos t} \cos n \, t \, dt \tag{18}$$

bzw.

$$K_n(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{Cof} t} \operatorname{Cof} n \, t \, dt \tag{19}$$

definiert sind.

Da, wie aus (18) zu ersehen ist, die modifizierten Besselfunktionen erster Art für unendliches Argument über alle Grenzen wachsen, haben wir im Hinblick auf (13) $C_1 = C_2 = 0$ zu setzen. Die verbleibenden Konstanten C_3 und C_4 werden so bestimmt, daß zunächst die Randbedingung (12), mit der das in z identische Verschwinden der Schubspannungen am Zylindermantel gefordert wird, erfüllt ist. Diese Bedingung führt auf eine homogene Gleichung, bei der es nur auf das Verhältnis der Konstanten C_3 und C_4 ankommt, so daß wir eine der Konstanten, etwa $C_3 = 1$ annehmen, und wenn $C_4 = \alpha A$ gesetzt wird, endgültig

$$L = K_0(\alpha r) + A \, \alpha \, r \, K_1(\alpha r) \tag{20}$$

schreiben können und für die gesuchte *Love*sche Verschiebungsfunktion mit (15) die Darstellung

$$\Phi = \int_0^\infty \varphi(\alpha) \, [K_0(\alpha r) + A \, \alpha \, r \, K_1(\alpha r)] \sin(\alpha z) \, d\alpha \tag{21}$$

erhalten.

Wir berechnen nun die im weiteren benötigten partiellen Differentialquotienten der *Love*schen Verschiebungsfunktion (21). Mit den aus dem zweiten Klammerterm von (16) rekursiv oder auch unmittelbar aus (19) berechneten Ableitungen der Funktionen $K_0(\alpha r)$ und $K_1(\alpha r)$ folgen die nachstehenden Ausdrücke:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\int_0^\infty \varphi(\alpha) \, \alpha \, [K_1(\alpha r) + A \, \alpha \, r \, K_0(\alpha r)] \sin(\alpha z) \, d\alpha \,, \tag{22}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -\int_0^\infty \varphi(\alpha) \, \alpha^2 \left[(A-1) \, K_0(\alpha r) - \left(A \, \alpha \, r + \frac{1}{\alpha \, r}\right) K_1(\alpha r)\right] \sin(\alpha z) \, d\alpha \,, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = + \int_0^\infty \varphi(\alpha)\, \alpha\, L(\alpha\, r) \cos(\alpha\, z)\, d\alpha\,, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = - \int_0^\infty \varphi(\alpha)\, \alpha^2\, L(\alpha\, r) \sin(\alpha\, z)\, d\alpha\,, \tag{25}$$

$$\Delta \Phi = - 2 \int_0^\infty \varphi(\alpha)\, \alpha^2\, A\, K_0(\alpha\, r) \sin(\alpha\, z)\, d\alpha\,. \tag{26}$$

Wird (25) und (26) in (8) eingeführt und die Ableitung nach r gebildet, so erhält man den Verlauf der Schubspannungen allgemein zu

$$\tau_{rz} = - \frac{2\,G}{1 - 2\,\nu} \int_0^\infty \alpha^3 \varphi(\alpha) \left\{ A\, [\alpha\, r\, K_0(\alpha\, r) - 2\,(1 - \nu)\, K_1(\alpha\, r)] + K_1(\alpha\, r) \right\} \sin(\alpha\, z)\, d\alpha\,. \tag{27}$$

Für $r = a$ müssen die Schubspannungen gemäß der Randbedingung (12), in z identisch verschwinden. Die Konstante A ist demnach so zu bestimmen, daß der in (27) innerhalb der geschwungenen Klammer stehende Ausdruck für $r = a$ Null wird, woraus sich

$$A(\alpha, a) = \frac{K_1(\alpha\, a)}{2\,(1 - \nu)\, K_1(\alpha\, a) - \alpha\, a\, K_0(\alpha\, a)} \tag{28}$$

ergibt. Mit (28) ist die *Love*sche Verschiebungsfunktion (21) bis auf die von r und z unabhängige Funktion $\varphi(\alpha)$ bestimmt.

Wir berechnen nun die Radialspannungen σ_r unter Verwendung von (5). Nach einigen Zwischenrechnungen folgt

$$- \sigma_r = - \frac{2\,G}{1 - 2\,\nu} \int_0^\infty \alpha^3 \varphi(\alpha) \left\{ \frac{K_1(\alpha\, a)}{2\,(1 - \nu)\, K_1(\alpha\, a) - \alpha\, a\, K_0(\alpha\, a)} \left[(1 - 2\,\nu)\, K_0(\alpha\, r) - \alpha\, r\, K_1(\alpha\, r) \right] \right.$$

$$\left. - \left[K_0(\alpha\, r) + \frac{1}{\alpha\, r} K_1(\alpha\, r) \right] \right\} \cos(\alpha\, z)\, d\alpha\,. \tag{29}$$

Dieser Ausdruck muß für $r = a$ in (14) übergehen; wir haben daher die Funktion $\varphi(\alpha)$ so zu wählen, daß mit $r = a$ die mit $- 2\,G/1 - 2\,\nu$ und $2\,p/\pi$ multiplizierten Integranden von (29) bezw. (14) für alle positiven Werte von α übereinstimmen. Da $\varphi(\alpha)$ für feste Werte von α als Konstante zu betrachten ist, erhält man aus dem Vergleich der Koeffizienten von (29) und (14)

$$\varphi(\alpha) = (1 - 2\,\nu)\, \frac{p\, a}{G\, \pi}\, \frac{2\,(1 - \nu)\, K_1(\alpha\, a) - \alpha\, a\, K_0(\alpha\, a)}{2\,(1 - \nu)\, K_1^2(\alpha\, a) + (\alpha\, a)^2\, [K_1^2(\alpha\, a) - K_0^2(\alpha\, a)]}\, \frac{\sin \alpha\, c}{\alpha^3}\,. \tag{30}$$

Die Einführung von (30) in (21) liefert schließlich die gesuchte *Love*sche Verschiebungsfunktion zu

$$\Phi(r, z) = (1 - 2\,\nu) \frac{p\, a}{G\, \pi} \int_0^\infty \frac{1}{2\,(1 - \nu)\, K_1^2(\alpha\, a) + (\alpha\, a)^2\, [K_1^2(\alpha\, a) - K_0^2(\alpha\, a)]}$$

$$\times \left\{ [2\,(1 - \nu)\, K_1(\alpha\, a) - \alpha\, a\, K_0(\alpha\, a)]\, K_0(\alpha\, r) + \alpha\, r\, K_1(\alpha\, a)\, K_1(\alpha\, r) \right\} \frac{\sin(\alpha\, c)}{\alpha^3} \sin(\alpha\, z)\, d\alpha\,. \tag{31}$$

Mit der Festlegung der *Love*schen Verschiebungsfunktion ist das Problem im wesentlichen gelöst; man hätte das uneigentliche Integral (31) auszuwerten und damit Φ als eine von r und z abhängige Funktion gewonnen, aus der die Spannungs- und Verschiebungsgrößen gemäß (5) bis (8) bezw. (9) und (10) berechnet werden können.

Praktisch kommt dieser Weg wegen der verwickelten Form des Integranden, die eine geschlossene Integration nicht zuläßt, kaum in Betracht. Man wird daher die zur Bestimmung der Spannungs- und Verschiebungsgrößen erforderlichen Differentiationen am Integranden vornehmen,

d. h. die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauschen und die so erhaltenen uneigentlichen Integrale

$$\sigma_{ik}(r, z) = \int_0^\infty S_{ik}(\alpha, r, z)\, d\alpha \tag{32}$$

und

$$u_i(r, z) = \int_0^\infty U_i(\alpha, r, z)\, d\alpha\,, \tag{33}$$

deren Konvergenz in jedem Fall zu überprüfen ist, für spezielle Werte von r und z mit Hilfe geeigneter Näherungsverfahren auswerten.

3. Radiale Deformation des Zylindermantels. Wir beschränken uns hier auf die Berechnung der Radialverschiebungen $u(a, z)$ des Zylindermantels; in ähnlicher Weise können auch die am Zylindermantel auftretenden Längsverschiebungen $w(a, z)$ bestimmt werden.

Für die Radialverschiebungen ergibt sich aus (21) mit (9)

$$u(r, z) = + \frac{1}{1-2\nu} \int_0^\infty \alpha^2 \varphi(\alpha) \left[K_1(\alpha r) + A\, \alpha r\, K_0(\alpha r)\right] \cos(\alpha z)\, d\alpha\,, \tag{34}$$

woraus nach Einführung von $\varphi(\alpha)$ und $A(\alpha, a)$ gemäß (30) bezw. (28) für u das uneigentliche Integral

$$u(r, z) = + \frac{p\, a}{G\, \pi} \int_0^\infty \frac{2(1-\nu)\, K_1(\alpha a) - \alpha a\, K_0(\alpha a)}{2(1-\nu)\, K_1^2(\alpha a) + (\alpha a)^2 \left[K_1^2(\alpha a) - K_0^2(\alpha a)\right]} \frac{\sin(\alpha c)}{\alpha}$$
$$\times \left[K_1(\alpha r) + \frac{K_1(\alpha a)}{2(1-\nu)\, K_1(\alpha a) - \alpha a\, K_0(\alpha a)}\, \alpha r\, K_0(\alpha r)\right] \cos(\alpha z)\, d\alpha \tag{35}$$

folgt, das, wie mit Hilfe der asymptotischen Entwicklungen der Funktionen K_0 und K_1 im weiteren bewiesen werden soll, für alle Werte r und z konvergent ist.

Für die am Zylindermantel auftretenden Radialverschiebungen erhält man speziell aus (35) mit $r = a$

$$u(a, z) = \frac{p\, a}{G\, \pi}\, 2(1-\nu) \int_0^\infty \frac{K_1^2(\alpha a)}{2(1-\nu)\, K_1^2(\alpha a) + \alpha a)^2 \left[K_1^2(\alpha a) - K_0^2(\alpha a)\right]} \frac{\sin(\alpha c)}{\alpha} \cos(\alpha z)\, d\alpha\,. \tag{36}$$

Wird anstelle von α die dimensionslose Variable λ eingeführt, die durch

$$\lambda = \alpha a \tag{37}$$

bestimmt sei, und durch $K_1^2(\alpha a) = K_1^2(\lambda)$ gekürzt, so geht (36) über in

$$u(a, z) = \frac{p\, a}{G\, \pi}\, 2(1-\nu) \int_0^\infty \frac{1}{2(1-\nu) + \lambda^2 \left[1 - \frac{K_0^2(\lambda)}{K_1^2(\lambda)}\right]} \frac{\sin \frac{c}{a}\lambda}{\lambda} \cos \frac{z}{a}\lambda\, d\lambda\,. \tag{38}$$

Schließlich liefert die Zerlegung des Produktes $\sin \frac{c}{a}\lambda \cos \frac{c}{a}\lambda$

$$u(a, z) = \frac{p\, a}{2\, G} \frac{2(1-\nu)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{z+c}{a}\lambda - \sin \frac{z-c}{a}\lambda}{2(1-\nu) + \lambda^2 \left[1 - \frac{K_0^2(\lambda)}{K_1^2(\lambda)}\right]} \frac{d\lambda}{\lambda}\,. \tag{39}$$

Behandeln wir den Lastbereich, in dem $z < c$ bleibt, getrennt von dem unbelasteten, in welchem $z > c$ ist, so gilt für $z < c$

$$u(a, z) = \frac{p\, a}{2\, G} \frac{2(1-\nu)}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin \frac{c+z}{a}\lambda}{2(1-\nu) + \lambda^2 \left[1 - \frac{K_0^2(\lambda)}{K_1^2(\lambda)}\right]} \frac{d\lambda}{\lambda} + \int_0^\infty \frac{\sin \frac{c-z}{a}\lambda}{2(1-\nu) + \lambda^2 \left[1 - \frac{K_0^2(\lambda)}{K_1^2(\lambda)}\right]} \frac{d\lambda}{\lambda} \right\}. \tag{40}$$

und für $z > c$

$$u(a,z) = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\left\{\int_0^\infty \frac{\sin\dfrac{z+c}{a}\,\lambda}{2(1-\nu)+\lambda^2\left[1-\dfrac{K_0^2(\lambda)}{K_1^2(\lambda)}\right]}\,\frac{d\lambda}{\lambda} - \int_0^\infty \frac{\sin\dfrac{z-c}{a}\,\lambda}{2(1-\nu)+\lambda^2\left[1-\dfrac{K_0^2(\lambda)}{K_1^2(\lambda)}\right]}\,\frac{d\lambda}{\lambda}\right\}. \quad (41)$$

Wird in (40), also für $z < c$, die Summe der beiden uneigentlichen Integrale mit U bezeichnet und der Übergang zum unendlichen Lastbereich vollzogen, so muß, wie aus dem Vergleich von (40) mit (2) hervorgeht,

$$\lim_{c\to\infty} U = \frac{\pi}{2(1-\nu)} \quad (42)$$

sein. Für $z = c$ müssen die durch (40) und (41) gegebenen Funktionen stetig ineinander übergehen, d. h. die zweiten Integrale in (40) und (41) verschwinden.

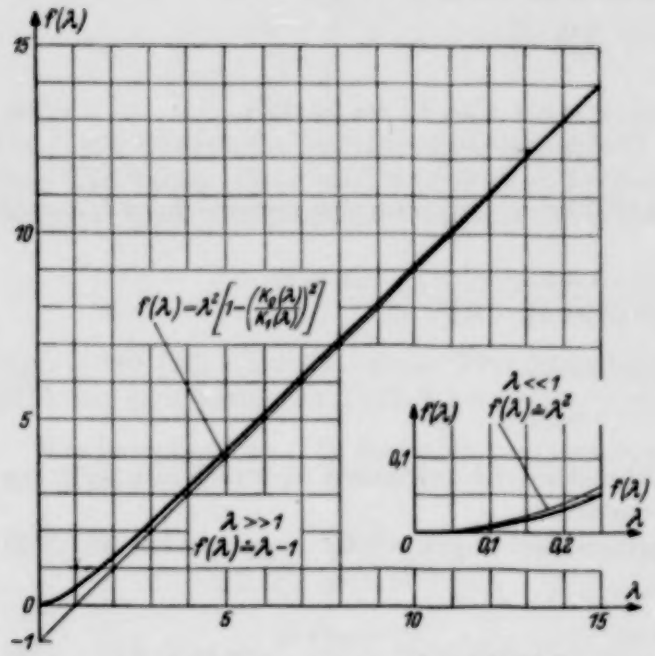

Abb. 2. Die Funktion $f(\lambda) = \lambda^2\left[1-\left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right]$.

Die in (40) und (41) auftretenden Integrale sind von der Form

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin\psi\,\lambda}{2(1-\nu)+\lambda^2\left[1-\left(\dfrac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right]}\,\frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (43)$$

wobei die mit z veränderlichen Faktoren $\psi(z) = \begin{cases}(z+c)/a\\ \pm\,(c-z)/a\end{cases}$ auf Werte $\psi(z) \geqq 0$ beschränkt bleiben.

Da die exakte Berechnung der Integrale (43), worauf schon hingewiesen wurde, nicht möglich ist und die numerische Auswertung, die für jede Abszisse z, also für jeden Wert $\psi(z)$ gesondert durchzuführen wäre, einen erheblichen Rechenaufwand erfordert, so werden wir den unendlichen Integrationsbereich in n Teilbereiche aufspalten, innerhalb welcher die im Nenner stehende Funktion

$$f(\lambda) = \lambda^2\left[1-\left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right] \quad (44)$$

(Abb. 2) durch einfach zu integrierende Näherungsfunktionen ersetzt werden kann.

Bezeichnen wir die dem k-ten Teilbereich mit den Grenzen $\omega_{k-1} < \lambda < \omega_k$ zugeordnete Näherungsfunktion mit $f_k(\lambda)$, so soll (43) demnach durch die Summe der Teilintegrale gemäß

$$\int_0^\infty \frac{\sin\psi\,\lambda}{2(1-\nu)+f(\lambda)}\,\frac{d\lambda}{\lambda} = \sum_{k=1}^{k=n}\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{\sin\psi\,\lambda}{2(1-\nu)+f_k(\lambda)}\,\frac{d\lambda}{\lambda} \quad (45)$$

ausgedrückt werden, wobei man sich im allgemeinen auf die Aufspaltung in vier bis sechs Teilbereiche beschränken kann.

Um Aufschluß über die zur Darstellung der Funktion $f(\lambda)$ in Betracht kommenden Näherungsfunktionen zu gewinnen, soll zunächst das Verhalten der modifizierten Besselfunktionen zweiter Art untersucht werden. Aus der Integraldarstellung (19) ist zu ersehen, daß die Funktionen $K_p(x)$ für reelles, positives Argument gleichfalls positiv und reell sind, und daß ferner mit $\lambda = x$ für $0 < \lambda < \infty$

$$\frac{K_p(\lambda)}{K_{p+1}(\lambda)} < 1 \quad (46)$$

sein muß. Mit den in der Umgebung des Nullpunktes für $p = 0$ und $p = 1$ aus den Reihenentwicklungen folgenden Näherungen[1]

$$K_0(\lambda) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma\,\lambda}, \quad (47)$$

$$K_1(\lambda) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\lambda}, \quad (48)$$

[1] *Jahnke-Emde*, Tafeln höherer Funktionen, S. 135, Leipzig 1948.

worin $\ln \gamma = C = 0{,}577\ldots$ die *Euler*sche Konstante bedeutet, folgt weiter

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)} = 0\,. \tag{49}$$

Damit aber wird

$$\lim_{\lambda \to 0} \left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2 = 0 \tag{50}$$

von höherer Kleinheitsordnung. Für Argumente $\lambda \ll 1$ ist der Verlauf der Funktion $f(\lambda) = \lambda^2 \left[1 - \left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right]$ daher im wesentlichen durch die Parabel $f_1(\lambda) = \lambda^2$ bestimmt (Abb. 2).

Zur Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Approximation werden wir $f(\lambda)$ besser durch ein Polynom der Form

$$f_1(\lambda) = \lambda^2 + \beta_1 \lambda^4 + \beta_2 \lambda^6 + \ldots \tag{51}$$

annähern, dessen Koeffizienten β_i unter Verwendung der aus Tafeln berechneten, exakten Werte von $f(\lambda)$ aus dem Minimum der Fehlerquadratsumme zu ermitteln sind. Um umständliche, auf komplexe Funktionen führende Partialbruchzerlegungen zu vermeiden, wird der in (43) enthaltene Bruch gemäß

$$\frac{1}{2(1-\nu) + f_1(\lambda)} = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[1 - \frac{f_1(\lambda)}{2(1-\nu)} + \frac{f_1^2(\lambda)}{4(1-\nu)^2} - \ldots\right] \tag{52}$$

in eine rasch konvergierende Reihe entwickelt. Die obere Grenze ω_1 des Intervalls, in dem $f(\lambda)$ durch $f_1(\lambda)$ angenähert werden soll, ist daher so anzunehmen, daß

$$\frac{f(\omega_1)}{2(1-\nu)} \doteq \frac{f_1(\omega_1)}{2(1-\nu)} \ll 1$$

wird. Wählen wir etwa $\omega_1 = 0{,}5$, dann wird mit $\nu = 0{,}2$ und $f(0{,}5) = 0{,}172$

$$\frac{f(\omega_1)}{2(1-\nu)} = 0{,}108\,.$$

Der maximale Fehler der nach dem dritten Gliede abgebrochenen Entwicklung (52) beträgt dann etwa 1% des richtigen Wertes $1/[2(1-\nu) + f(\lambda)]$, während der Fehler des Integrals wesentlich geringer ist.

In ihrem weiteren Verlauf nähert sich die Funktion $f(\lambda)$, wie aus Abb. 2 zu ersehen ist, asymptotisch einer Geraden; schon für kleinere Argumente ist $f(\lambda)$ nur schwach gekrümmt, so daß von $\lambda = \omega_1 = 0{,}5$ an eine stückweise Annäherung durch lineare Funktionen möglich ist. Wir setzen hier also

$$f_2(\lambda) = \mu\lambda + \varkappa'\,, \tag{53}$$

wobei die Konstanten μ und $\varkappa'$ wieder wie oben aus der kleinsten Fehlerquadratsumme zu berechnen sind. Damit folgt weiter

$$\frac{1}{2(1-\nu) + f(\lambda)} \doteq \frac{1}{2(1-\nu) + \mu\lambda + \varkappa'}\,. \tag{54}$$

Wird die rechte Seite von (54) unter Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$\frac{2(1-\nu) + \varkappa'}{\mu} = \varkappa \tag{55}$$

umgeformt, so erhält man in

$$\frac{1}{\mu(\varkappa + \lambda)} \doteq \frac{1}{2(1-\nu) + f(\lambda)} \tag{56}$$

einen einfachen Näherungsausdruck, mit dem die Integration (43) geschlossen durchgeführt werden kann.

Im stärker gekrümmten Bereich kleinerer Argumente wird die Funktion $f(\lambda)$ nur innerhalb eines kürzeren Intervalls durch eine Gerade anzunähern sein; für größere Argumente nimmt die Krümmung rasch ab, so daß hier die Intervallänge vergrößert werden kann. Wir ersetzen demzufolge die Funktion $f(\lambda)$ etwa im Intervall $0{,}5 = \omega_1 \leftrightarrow \omega_2 = 3{,}0$ durch die Näherungsgerade f_2 und im Intervall $3{,}0 = \omega_1 \leftrightarrow \omega_3 = 15{,}0$ durch die Näherungsgerade f_3.

Um Aufschluß über das Verhalten der Funktion $f(\lambda)$ im Unendlichen zu erhalten, gehen wir von der bekannten asymptotischen Darstellung der modifizierten Besselfunktionen zweiter Art aus; für große Argumente x und die Ordnungen 1 und 2 gilt[1]

$$K_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 - \frac{1}{(2x)\,2^2} + \frac{1}{(2x)^2}\,\frac{9}{2!\,2^4} - \frac{1}{(2x)^3}\,\frac{9\cdot 25}{3!\,2^6} + \cdots\right], \tag{57}$$

$$K_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 + \frac{1}{(2x)}\,\frac{3}{2^2} - \frac{1}{(2x)}\,\frac{3\cdot 5}{2!\,2^4} + \frac{1}{(2x)^3}\,\frac{3\cdot 5\cdot 21}{3!\,2^6} - \cdots\right]. \tag{58}$$

Beide Funktionen fallen also mit wachsendem Argument monoton ab und verschwinden im Unendlichen stärker als die Exponentialfunktion.

Bilden wir mit $x = \lambda$ den Ausdruck $\lambda^2\left[1 - \left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right]$, indem wir die Reihen nach den Gliedern mit λ^{-2} abbrechen, so folgt bis auf Glieder höherer Kleinheitsordnung

für $\lambda \gg 1$

$$\lambda^2\left[1 - \left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right] \equiv f(\lambda) = \lambda - 1 + \frac{9}{8\lambda} - \cdots \tag{59}$$

als asymptotische Darstellung der Funktion $f(\lambda)$. Für die Grenzwerte der in (53) eingeführten Konstanten gilt

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mu = +1\,, \tag{60}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varkappa' = -1\,, \tag{61}$$

daher

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varkappa = 1 - 2\nu\,, \tag{62}$$

und (56) geht über in

$$\frac{1}{2(1-\nu) + \lambda^2\left[1 - \left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right]} = \frac{1}{1 - 2\nu + \lambda}\,. \tag{63}$$

Mit (59) kann nun auch die noch offene Frage nach der Konvergenz des Integrals (43) bzw. (36) erledigt werden. Der Integrand ist jedenfalls stetig; für große Werte λ gilt, wenn zur Abkürzung

$$\frac{\sin\psi\lambda}{2(1-\nu) + f(\lambda)}\,\frac{1}{\lambda} = g(\psi, \lambda)$$

gesetzt und $f(\lambda)$ gemäß der asymptotischen Darstellung (59) ausgedrückt wird, mit $\lambda > b \gg 1$

$$|g(\psi, \lambda)| = \left|\frac{\sin\psi\lambda}{(1-2\nu)\lambda + \lambda^2}\right| < M\lambda^{-2}\,,$$

wobei M eine positive Konstante ist und damit

$$\int_A^\infty g(\psi, \lambda)\, d\lambda < \int_A^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \frac{M}{A(\varepsilon)} = \varepsilon$$

wird. Da aber ε für $A(\varepsilon) > b$ unabhängig von ψ beliebig klein gemacht werden kann, ist die gleichmäßige Konvergenz von (43) und (36) nach bekannten Sätzen der Analysis gesichert.

Von etwa $\lambda = 15{,}0$ an wird der bei der Näherung (63) auftretende Fehler unerheblich, so daß wir im Bereich $\omega_3 = 15{,}0 < \lambda < \omega_4 \to \infty$ $f(\lambda)$ durch die in (59) definierte Asymptote, die wir hier mit $f_4(\lambda)$ bezeichnen wollen, ersetzen können.

Werden die durch Einführung der Näherungsfunktionen $f_k(\lambda)$ erhaltenen Brüche (52) bzw. (56) mit $\frac{\sin\psi\lambda}{\lambda}\, d\lambda$ multipliziert, so folgen mit $k = 1$

$$J_1 = \frac{1}{2(1-\nu)}\int_0^{\omega_3} \frac{\sin\psi\lambda}{\lambda}\left[1 - \frac{f_1(\lambda)}{2(1-\nu)} + \frac{f_1^2(\lambda)}{4(1-\nu)^2} - \cdots\right] d\lambda \tag{64}$$

[1] *G. N. Watson*, A treatise on the theory of Bessel functions S. 122, Cambridge 1922.

und mit $k = 2, 3, \ldots$

$$J_k = \frac{1}{\mu} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{\sin \psi \lambda}{\varkappa + \lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} \tag{65}$$

zwei Typen von Integralen, aus denen die Lösung von (43) gemäß (45) aufzubauen ist.

Das dem ersten Bereich $0 < \lambda < \omega_1$ zugeordnete Integral (64) formen wir durch Einführung von $f_1(\lambda)$ aus (51) um und ordnen nach steigenden Potenzen von λ:

$$J_1 = \frac{1}{2(1-\nu)} \int_0^{\omega_1} \frac{\sin \psi \lambda}{\lambda} \left[1 - \frac{\lambda^2}{2(1-\nu)} + \left(\frac{1}{2(1-\nu)} - \beta_1 \right) \frac{\lambda^4}{2(1-\nu)} - \cdots \right] d\lambda \,. \tag{66}$$

Ausmultiplizieren auf der rechten Seite und Trennung der Integrale liefert

$$J_1 = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[\int_0^{\omega_1} \frac{\sin \psi \lambda}{\lambda} \, d\lambda - \frac{1}{2(1-\nu)} \int_0^{\omega_1} \lambda \sin \psi \lambda \, d\lambda \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4(1-\nu)^2} - \frac{\beta_1}{2(1-\nu)} \right) \int_0^{\omega_1} \lambda^3 \sin \psi \lambda \, d\lambda - \cdots \right] . \tag{67}$$

Durch Auswertung der Integrale und Einsetzen der Grenzen ergibt sich schließlich

$$J_1 = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \mathrm{Si}(\psi \omega_1) - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{1}{\psi^2} (\sin \psi \omega_1 - \psi \omega_1 \cos \psi \omega_1) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4(1-\nu)^2} - \frac{\beta_1}{2(1-\nu)} \right) \frac{1}{\psi^4} \left[3(\psi^2 \omega_1^2 - 2) \sin \psi \omega_1 - \psi \omega_1 (\psi^2 \omega_1^2 - 6) \cos \psi \omega_1 \right] \right\} . \tag{68}$$

Dabei ist unter der mit Si bezeichneten Funktion der durch

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-1}}{(2k-1) \cdot (2k-1)!} \tag{69}$$

definierte Integralsinus zu verstehen. Für kleine Argumente gilt die aus der Reihendarstellung folgende Näherung $x \ll 1$

$$\mathrm{Si}(x) = x \,, \tag{70}$$

während Si (x) für große Argumente $x \gg 1$ durch die asymptotische Darstellung

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} H_1(x) - \frac{\sin x}{x^2} H_2(x) \,^{1} \tag{71}$$

mit

$$H_1(x) = 1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots + \tag{72}$$

und

$$H_2(x) = 1 - \frac{3!}{x^2} + \frac{5!}{x^5} - \cdots + \tag{73}$$

angenähert werden kann. Damit folgt weiter

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} \,.$$

In diesem Zusammenhang definieren wir ferner den bei der Auswertung von (65) auftretenden Integralcosinus durch

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt = \ln \gamma - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} \, dt \equiv = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k \cdot (2k)!} \tag{74}$$

[1] *Jahnke-Emde*, a. a. O. S. 3, dort in komplexer Form.

mit den Näherungen für $x \ll 1$

$$\mathrm{Ci}\,(x) = -\ln \frac{1}{\gamma\, x}\,, \tag{75}$$

daher

$$\lim_{x \to 0} \mathrm{Ci}\,(x) = -\infty \tag{76}$$

und[1] für $x \gg 1$

$$\mathrm{Ci}\,(x) = \frac{\sin x}{x}\, H_1(x) - \frac{\cos x}{x^2}\, H_2(x)\,, \tag{77}$$

demnach

$$\lim_{x \to \infty} \mathrm{Ci}\,(x) = 0\,. \tag{78}$$

$C = \ln \gamma$ entspricht hierbei der in (47) aufgetretenen *Euler*schen Konstanten.

Mit Hilfe von (70) und den Entwicklungen für die Kreisfunktionen erhalten wir für kleine Argumente $\psi \ll 1$ aus (68)

$$J_1 = \frac{1}{2\,(1-\nu)} \left[\psi\, \omega_1 - \frac{\psi^3\, \omega_1^3}{18} - \frac{1}{2\,(1-\nu)}\, \frac{\psi\, \omega_1^3}{3} + \left(\frac{1}{4\,(1-\nu)^2} - \frac{\beta_1}{2\,(1-\nu)}\right)\left(1 - \frac{\psi^2\, \omega_1^2}{12}\right) \frac{\psi\, \omega_1^5}{5}\right] \tag{79}$$

und stellen fest, daß J_1 im wesentlichen durch das erste Glied von (68) bestimmt ist und mit $\psi \to 0$ verschwindet.

Für $\psi \to \infty$ folgt aus (68) und (71) wegen

$$\lim_{x \to \infty} H_1(x) = \lim_{x \to \infty} H_2(x) = 1\,, \tag{80}$$

$$J_1 = \frac{1}{2\,(1-\nu)}\, \frac{\pi}{2}\,. \tag{81}$$

Zur Auswertung der Integrale der Form (65), in denen $f(\lambda)$ durch eine lineare Funktion angenähert ist, setzen wir

$$J_k = \frac{1}{\mu} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{\sin \psi\, \lambda}{\varkappa + \lambda}\, \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \left(\int_0^{\psi} \frac{\cos \psi\, \lambda}{\varkappa + \lambda}\, d\psi\right) d\lambda\,, \tag{82}$$

drücken also das gegebene Integral durch ein Doppelintegral aus, das bei vertauschter Integrationsfolge

$$\frac{1}{\mu} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \left(\int_0^{\psi} \frac{\cos \psi\, \lambda}{\varkappa + \lambda}\, d\psi\right) d\lambda = \frac{1}{\mu} \int_0^{\psi} \left(\int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{\cos \psi\, \lambda}{\varkappa + \lambda}\, d\lambda\right) d\psi \tag{83}$$

leicht zu berechnen ist. Für das innere Integral erhält man nach Einsetzen der Grenzen ω_{k-1} und ω_k

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_{\omega_{k-1}}^{\omega_k} \frac{\cos \psi\, \lambda}{\varkappa + \lambda}\, d\lambda = \frac{1}{\mu} \{&\cos \psi\, \varkappa\, [\mathrm{Ci}\, \psi(\varkappa + \omega_k) - \mathrm{Ci}\, \psi(\varkappa + \omega_{k-1})] \\ &+ \sin \psi\, \varkappa\, [\mathrm{Si}\, \psi(\varkappa + \omega_k) - \mathrm{Si}\, \psi(\varkappa + \omega_{k-1})]\}\,. \end{aligned} \tag{84}$$

Wird die rechte Seite von (84) gemäß (83) nach ψ integriert, so ergibt sich unter Beachtung der Grenzen 0 und ψ mit (82)

$$\begin{aligned} J_k = \frac{1}{\varkappa\, \mu} \{&\sin \psi\, \varkappa\, [\mathrm{Ci}\, \psi(\varkappa + \omega_k) - \mathrm{Ci}\, \psi(\varkappa + \omega_{k-1})] \\ &- \cos \psi\, \varkappa\, [\mathrm{Si}\, \psi(\varkappa + \omega_k) - \mathrm{Si}\, \psi(\varkappa + \omega_{k-1})] + \mathrm{Si}\, \psi\, \omega_k - \mathrm{Si}\, \psi\, \omega_{k-1}\}\,. \end{aligned} \tag{85}$$

Für Argumente $\psi \ll 1$ folgt mit (70) und (75) aus (85)

$$J_k = \frac{\psi}{\mu} \left\{\ln \frac{\varkappa + \omega_k}{\varkappa + \omega_{k-1}} - \frac{\psi^2}{6} \left[\varkappa^2 \ln \frac{\varkappa + \omega_k}{\varkappa + \omega_{k-1}} - \varkappa(\omega_k - \omega_{k-1}) + \frac{1}{2}\, (\omega_k^2 - \omega_{k-1}^2)\right]\right\}, \tag{86}$$

[1] *Jahnke-Emde* a. a. O. S 3.

während man für große Argumente mit (71) und (77) aus (85) die asymptotische Darstellung

$$\psi \gg 1 \qquad J_k = \frac{1}{\varkappa \mu}\,\frac{1}{\psi}\left\{\cos\psi\,\omega_k\left(\frac{1}{\varkappa+\omega_k}+\frac{1}{\omega_k}\right)-\cos\psi\,\omega_{k-1}\left(\frac{1}{\varkappa+\omega_{k-1}}+\frac{1}{\omega_{k-1}}\right)\right\} \tag{87}$$

erhält; für $\psi\to\infty$ verschwindet das Integral daher.

Für den letzten von $\omega_{k-1}=\omega_{n-1}$ bis ins Unendliche erstreckten Teilbereich ergibt sich mit $\omega_{n-1}<\lambda<\omega_n\to\infty$ unter Beachtung von (60), (71) und (78)

$$J_n=\frac{1}{\varkappa}\left\{-\sin\psi\,\varkappa\,\mathrm{Ci}\,\psi(\varkappa+\omega_{n-1})-\cos\psi\,\varkappa\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,\psi(\varkappa+\omega_{n-1})\right)+\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,\psi\,\omega_{n-1}\right\}, \tag{88}$$

worin $\varkappa$ den durch (62) bestimmten Wert $1-2\nu$ annimmt.

Durch Summation der mit (68), (85) und (88) für die einzelnen Teilintervalle berechneten Integrale gemäß (45) erhält man schließlich das endgültige, über den unendlichen Bereich $0\leftrightarrow\infty$ erstreckte Integral

$$J=J_1+J_2+\cdots+J_n\,.$$

Wir werden die aus der Integration gewonnenen Funktionen jedoch, nach Teilbereichen getrennt, unmittelbar in (40) und (41) einführen; hierbei ist ψ für $z<c$ durch die Größen $(z+c)/a$ und $(c-z)/a$ und für $z>c$ durch $(z+c)/a$ und $(z-c)/a$ zu ersetzen.

Mit $\psi=0$ also $z=c$ verschwinden, wie aus (68), (85) und (88) hervorgeht, sämtliche Teilintegrale; die Funktionen sind daher, worauf oben bereits hingewiesen wurde, stetig. Ebenso verschwinden die Teilintegrale (85) und (88) für unendliches Argument, während das aus der Integration innerhalb des ersten Teilbereiches folgende Integral für $\psi\to\infty$ zunächst auf den durch (81) gegebenen endlichen Wert führt und die endgültigen Grenzwerte hier erst aus der nachstehenden Zusammenfassung der Teilintegrale gemäß (40) und (41) folgen. Für das Teilintervall $0<\lambda<\omega_1$ gilt Folgendes: Die Einführung von $(z+c)/a$ und $(\pm c-z)/a$ in (68) liefert für $z<c$

$$\begin{aligned}u_1(a,z)=\frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\frac{1}{2(1-\nu)}\Bigg\{&\mathrm{Si}\,\omega_1\,\frac{z+c}{a}+\mathrm{Si}\,\omega_1\,\frac{c-z}{a}-\frac{1}{2(1-\nu)}\Bigg[\left(\frac{a}{z+c}\right)^2\sin\omega_1\,\frac{z+c}{a}\\
&-\frac{\omega_1 a}{z+c}\cos\omega_1\,\frac{z+c}{a}+\left(\frac{a}{c-z}\right)^2\sin\omega_1\,\frac{c-z}{a}-\frac{\omega_1 a}{c-z}\cos\omega_1\,\frac{c-z}{a}\Bigg]\\
&+\left(\frac{1}{4(1-\nu)^2}-\frac{\beta_1}{2(1-\nu)}\right)\Bigg[\left(\frac{a}{z+c}\right)^4\Bigg\langle 3\left(\omega_1^2\left(\frac{z+c}{a}\right)^2-2\right)\sin\omega_1\,\frac{z+c}{a}\\
&-\omega_1\,\frac{z+c}{a}\left(\omega_1^2\left(\frac{z+c}{a}\right)^2-6\right)\cos\omega_1\,\frac{z+c}{a}\Bigg\rangle+\left(\frac{a}{c-z}\right)^4\Bigg\langle 3\left(\omega_1^2\left(\frac{c-z}{a}\right)^2-2\right)\sin\omega_1\,\frac{c-z}{a}\\
&-\omega_1\,\frac{c-z}{a}\left(\omega_1^2\left(\frac{c-z}{a}\right)^2-6\right)\cos\omega_1\,\frac{c-z}{a}\Bigg\rangle\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{89}$$

und für $z>c$

$$\begin{aligned}u_1(a,z)=\frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\frac{1}{2(1-\nu)}\Bigg\{&\mathrm{Si}\,\omega_1\,\frac{z+c}{a}-\mathrm{Si}\,\omega_1\,\frac{z-c}{a}-\frac{1}{2(1-\nu)}\Bigg[\left(\frac{a}{z+c}\right)^2\sin\omega_1\,\frac{z+c}{a}\\
&-\frac{\omega_1 a}{z+c}\cos\omega_1\,\frac{z+c}{a}-\left(\frac{a}{z-c}\right)^2\sin\omega_1\,\frac{z-c}{a}+\frac{\omega_1 a}{z-c}\cos\omega_1\,\frac{z-c}{a}\Bigg]\\
&+\left(\frac{1}{4(1-\nu)^2}-\frac{\beta_1}{2(1-\nu)}\right)\Bigg[\left(\frac{a}{z+c}\right)^4\Bigg\langle 3\left(\omega_1^2\left(\frac{z+c}{a}\right)^2-2\right)\sin\omega_1\,\frac{z+c}{a}\\
&-\omega_1\,\frac{z+c}{a}\left(\omega_1^2\left(\frac{z+c}{a}\right)^2-6\right)\cos\omega_1\,\frac{z+c}{a}\Bigg\rangle-\left(\frac{a}{z-c}\right)^4\Bigg\langle 3\left(\omega_1^2\left(\frac{z-c}{a}\right)^2-2\right)\sin\omega_1\,\frac{z-c}{a}\\
&-\omega_1\,\frac{z-c}{a}\left(\omega_1^2\left(\frac{z-c}{a}\right)^2-6\right)\cos\omega_1\,\frac{z-c}{a}\Bigg\rangle\Bigg]\Bigg\}\,.\end{aligned} \tag{90}$$

Wächst der Lastbereich c über alle Grenzen, dann verschwinden in (89), also für $c>z$, alle Glieder außer

$$\mathrm{Si}\,\omega_1\,\frac{z+c}{a}+\mathrm{Si}\,\omega_1\,\frac{c-z}{a}\,,$$

und wir erhalten mit (81) wegen $\lim_{z\to\infty}\left(\mathrm{Si}\,\omega_1\frac{z+c}{a}+\mathrm{Si}\,\omega_1\frac{c-z}{a}\right)=\pi$

$$\lim_{c\to\infty} u_1 = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\frac{\pi}{2(1-\nu)} = \frac{p\,a}{2\,G}\,. \tag{91}$$

Schließlich folgt aus (90) für gegen Unendlich anwachsende Werte von z

$$\lim_{z\to\infty} u_1 = 0\,, \tag{92}$$

d. h. also, der aus der Integration über den ersten Teilbereich folgende Verschiebungsanteil verschwindet im Unendlichen.

Die aus der linearen Approximation von $f(\lambda)$ in den mittleren Integrationsbereichen $\omega_{k-1} < \lambda < \omega_k$ herrührenden Verschiebungsanteile u_k erhalten wir durch Einsetzen der Argumente $(z+c)/a$ und $(c-z)/a$ bzw. $(z+c)/a$ und $(z-c)/a$ in (85), nämlich für $z < c$

$$\begin{aligned} u_k = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\frac{1}{\varkappa\mu}\Bigg\{ &\sin\varkappa\frac{z+c}{a}\left[\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z+c}{a}-\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z+c}{a}\right] \\ &+\sin\varkappa\frac{c-z}{a}\left[\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{c-z}{a}-\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{c-z}{a}\right] \\ &-\cos\varkappa\frac{z+c}{a}\left[\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z+c}{a}-\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z+c}{a}\right] \\ &-\cos\varkappa\frac{c-z}{a}\left[\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{c-z}{a}-\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{c-z}{a}\right] \\ &+\mathrm{Si}\,\omega_k\frac{z+c}{a}-\mathrm{Si}\,\omega_{k-1}\frac{z+c}{a}+\mathrm{Si}\,\omega_k\frac{c-z}{a}-\mathrm{Si}\,\omega_{k-1}\frac{c-z}{a}\Bigg\} \end{aligned} \tag{93}$$

und für $z > c$

$$\begin{aligned} u_k = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\frac{1}{\varkappa\mu}\Bigg\{ &\sin\varkappa\frac{z+c}{a}\left[\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z+c}{a}-\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z+c}{a}\right] \\ &-\sin\varkappa\frac{z-c}{a}\left[\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z-c}{a}-\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z-c}{a}\right] \\ &-\cos\varkappa\frac{z+c}{a}\left[\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z+c}{a}-\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z+c}{a}\right] \\ &+\cos\varkappa\frac{z-c}{a}\left[\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z-c}{a}-\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z-c}{a}\right] \\ &+\mathrm{Si}\,\omega_k\frac{z+c}{a}-\mathrm{Si}\,\omega_{k-1}\frac{z+c}{a}-\mathrm{Si}\,\omega_k\frac{z-c}{a}+\mathrm{Si}\,\omega_{k-1}\frac{z-c}{a}\Bigg\}\,. \end{aligned} \tag{94}$$

Für den unendlichen Lastbereich verschwindet (93):

$$\lim_{c\to\infty} u_k = 0\,, \tag{95}$$

ebenso gilt

$$\lim_{z\to\infty} u_k = 0\,. \tag{96}$$

Lassen wir in (85) und (86) die obere Grenze $\omega_k = \omega_n \to \infty$ anwachsen, so erhalten wir den vom n-ten Integrationsbereich herrührenden Verschiebungsanteil u_n.

Mit den durch (60) und (63) bestimmten Grenzwerten der Konstanten μ bzw. $\varkappa$ folgt, wenn wir die untere Grenze mit ω_{n-1} bezeichnen, für $z < c$

$$\begin{aligned} u_n = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\frac{1}{1-2\,\nu}\Bigg\{ &-\sin(1-2\,\nu)\frac{z+c}{a}\,\mathrm{Ci}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\frac{z+c}{a} \\ &-\sin(1-2\,\nu)\frac{c-z}{a}\,\mathrm{Ci}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\frac{c-z}{a} \\ &-\cos(1-2\,\nu)\frac{z+c}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\frac{z+c}{a}\right] \\ &-\cos(1-2\,\nu)\frac{c-z}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\frac{c-z}{a}\right] \\ &+\pi-\left(\mathrm{Si}\,\omega_{n-1}\frac{z+c}{a}+\mathrm{Si}\,\omega_{n-1}\frac{c-z}{a}\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{97}$$

und für $z > c$

$$u_n = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\frac{1}{1-2\,\nu}\left\{-\sin(1-2\,\nu)\,\frac{z+c}{a}\,\mathrm{Ci}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\,\frac{z+c}{a}\right.$$
$$+\sin(1-2\,\nu)\,\frac{z-c}{a}\,\mathrm{Ci}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\,\frac{z-c}{a}$$
$$-\cos(1-2\,\nu)\,\frac{z+c}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\,\frac{z+c}{a}\right]$$
$$+\cos(1-2\,\nu)\,\frac{z-c}{a}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}\,(1-2\,\nu+\omega_{n-1})\,\frac{z-c}{a}\right]$$
$$\left.-\left(\mathrm{Si}\,\omega_{k-1}\,\frac{z+c}{a}-\mathrm{Si}\,\omega_{k-1}\,\frac{z-c}{a}\right)\right\}. \tag{98}$$

Aus (97) und (98) erhält man offensichtlich gleichfalls die oben für (93) und (94) abgeleiteten Grenzwerte.

Die endgültigen Radialverschiebungen folgen nun aus der Überlagerung der einzelnen Teilintegrale, und zwar gilt für die innerhalb des Lastbereiches liegenden Querschnitte gemäß (40), falls $z < c$ ist,

$$u(a,z) = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\left[U_k\left(\frac{z+c}{a}\right)+U_k\left(\frac{c-z}{a}\right)\right] \tag{99}$$

und für die außerhalb des Lastbereiches gemäß (41), falls $z > c$ ist,

$$u(a,z) = \frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\left[U_k\left(\frac{z+c}{a}\right)-U_k\left(\frac{z-c}{a}\right)\right], \tag{100}$$

wobei die aus der Integration über die einzelnen Teilintervalle $\omega_{k-1} \leftrightarrow \omega_k$ erhaltenen Funktionen (89), (93), (97) bzw. (90), (94) und (98), unter Weglassung des herausgehobenen Faktors $\frac{p\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}$ anstelle der Größen U einzusetzen sind.

Die durch (99) und (100) dargestellte Funktion $u(a, z)$ ist, wie bereits festgestellt wurde, stetig und verschwindet im Unendlichen. Mit wachsendem Lastbereich $2c$ strebt sie wegen (91) und (95) — wie es sein muß — dem aus der *Airy*schen Spannungsfunktion für den ebenen Verzerrungszustand abgeleiteten Wert (2) zu:

$$\lim_{c\to\infty} u(a,z) = \frac{p\,a}{2\,G}.$$

4. Radialverschiebungen zufolge einer in $z = 0$ konzentrierten Druckverteilung. Durch einen Grenzübergang können wir schließlich auch die von einer im Querschnitt $z = 0$ konzentrierten Druckverteilung P am Zylindermantel hervorgerufenen Radialverschiebungen $u_P(z)$ erhalten. Mit der auf die Längeneinheit des Umfanges bezogenen Intensität P kann

$$p = \frac{P}{2\,c} \tag{101}$$

gesetzt werden. Läßt man nun bei festgehaltenem Wert von P die Länge c gegen Null gehen, dann folgt aus (99), d. h. mit $z > c$

$$u_P = \lim_{c\to 0}\frac{P\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2\,c}\left[U_k\left(\frac{z+c}{a}\right)-U_k\left(\frac{z-c}{a}\right)\right] \tag{102}$$

und für $c = 0$ innerhalb des Summenzeichens die unbestimmte Form 0/0. Die Anwendung der de *l'Hospital*schen Regel liefert

$$u_P(z) = \lim_{c\to 0}\frac{P\,a}{2\,G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2\,a}\left[U_k'\left(\frac{z+c}{a}\right)+U_k'\frac{z-c}{a}\right], \tag{103}$$

worin die Striche hier und im folgenden Ableitungen nach $(z+c)/a$ bzw. $(z-c)/a$ anzeigen. Vollziehen wir nun den Grenzübergang, dann folgt nach Kürzen von a schließlich

$$u_P(z) = \frac{P}{2G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\sum_{k=1}^{k=n} U_k'\left(\frac{z}{a}\right). \tag{104}$$

Wir bilden nun die den einzelnen Integrationsbereichen zugeordneten Funktionen U_k' und erhalten so für den ersten Integrationsbereich $0 \dots \omega_1$ aus (90)

$$\begin{aligned} U_1'\left(\frac{z}{a}\right) = {} & \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\frac{a}{z}\sin\omega_1\frac{z}{a} - \frac{1}{2(1-\nu)}\left(\frac{a}{z}\right)^3\left[2\,\omega_1\frac{z}{a}\cos\omega_1\frac{z}{a} + \left(\left(\omega_1\frac{z}{a}\right)^2 - 2\right)\sin\omega_1\frac{z}{a}\right]\right. \\ & + \left(\frac{1}{4(1-\nu)^2} - \frac{\beta_1}{2(1-\nu)}\right)\left(\frac{a}{z}\right)^4\left[\left(4\left(\omega_1\frac{z}{a}\right)^3 - 24\,\omega_1\right)\cos\omega_1\frac{z}{a}\right. \\ & \left.\left. + \frac{a}{z}\left(\left(\omega_1\frac{z}{a}\right)^4 - 12\left(\omega_1\frac{z}{a}\right)^2 + 24\right)\sin\omega_1\frac{z}{a}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{105}$$

Die Funktion verschwindet offenbar mit $z\to\infty$; für $z\to 0$ strebt sie, wie die folgende für Argumente $z/a \ll 1$ geltende, nach dem quadratischen Glied $(z/a)^2$ abgebrochene Reihenentwicklung zeigt, einem endlichen Grenzwert zu:

$$\begin{aligned} U_1'\left(\frac{z}{a}\right) = {} & \frac{1}{2(1-\nu)}\left\{\omega_1 - \frac{1}{6}\left(\omega_1\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{1}{2(1-\nu)}\,\frac{\omega_1^3}{3}\left[1 - \frac{3}{10}\,\omega_1\frac{z}{a}\right)^2\right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4(1-\nu)^2} - \frac{\beta_1}{2(1-\nu)}\right)\frac{\omega_1^5}{5}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\omega_1\frac{z}{a}\right)^2\right]\right\} \qquad \left(\frac{z}{a} \ll 1\right). \end{aligned} \tag{106}$$

Für die Integrationsbereiche, in denen $f(\lambda)$ durch Gerade angenähert wird, erhalten wir die Differentialquotienten U_k' unter Beachtung von (83) unmittelbar aus (84) zu

$$\begin{aligned} U_k'\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{\mu}\left\{\cos\varkappa\frac{z}{a}\left[\mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z}{a} - \mathrm{Ci}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z}{a}\right]\right. \\ \left. + \sin\varkappa\frac{z}{a}\left[\mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_k)\frac{z}{a} - \mathrm{Si}\,(\varkappa+\omega_{k-1})\frac{z}{a}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{107}$$

Auch diese Funktion verschwindet, wie es sein muß, wegen (71) und (77) für $z\to\infty$. Ebenso strebt sie für $z\to 0$ einem endlichen Grenzwert zu; die für kleine Werte z/a gültige Reihenentwicklung führt hier auf

$$U_k'\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{1}{\mu}\left[\ln\frac{\omega_k+\varkappa}{\omega_{k-1}+\varkappa} - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{a}\right)^2\left((\omega_k-\varkappa)^2 - (\omega_{k-1}-\varkappa)^2 + 2\,\varkappa^2\ln\frac{\omega_k+\varkappa}{\omega_{k-1}+\varkappa}\right)\right]\left(\frac{z}{a} \ll 1\right) \tag{108}$$

und damit auf den Grenzwert

$$U_k'(0) = \frac{1}{\mu}\ln\frac{\omega_k+\varkappa}{\omega_{k-1}+\varkappa}. \tag{109}$$

Für den letzten Integrationsbereich, in dem $\omega_k = \omega_n \to \infty$ gilt, folgt aus (107) mit (71) und (74) sowie $\varkappa = 1-2\nu$ und $\mu = 1$ die Funktion

$$U_n'\left(\frac{z}{a}\right) = -\left[\cos\varkappa\frac{z}{a}\,\mathrm{Ci}\,(\omega_{n-1}+\varkappa)\frac{z}{a} - \sin\varkappa\frac{z}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\,(\omega_{n-1}+\varkappa)\frac{z}{a}\right)\right], \tag{110}$$

die für $z/a\to\infty$ verschwindet und für $z/a\to 0$ logarithmisch unendlich wird, wie aus der Reihendarstellung hervorgeht:

$$\begin{aligned} U_n'\left(\frac{z}{a}\right) = {} & -\ln\frac{z}{a}\,\gamma\,(\omega_{n-1}+\varkappa) + \frac{z}{a}\,\frac{\pi\,\varkappa}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2\left[\varkappa^2\ln\frac{z}{a}\,\gamma\,(\omega_{n-1}+\varkappa)\right. \\ & \left. + \frac{\omega_{n-1}+\varkappa}{2}\,(\omega_{n-1}-3\,\varkappa)\right] \qquad \left(\frac{z}{a} \ll 1\right). \end{aligned} \tag{111}$$

Wir haben nun die durch (105), (107) und (110) bzw. (106), (108) und (111) dargestellten Ableitungen U_k' in (104) einzuführen und erhalten damit den gesuchten Verlauf der von einem in $z=0$ konzentrierten Innendruck P bewirkten Radialverschiebungen $u_P(z)$.

Zur Berechnung der von beliebig über z verteilten rotationssymmetrischen Innendrücken hervorgerufenen Radialverschiebungen kann (104) mit $P = 1$ als Einflußfunktion verwendet werden.

Da in den einzelnen Teilfunktionen, aus denen u_P aufgebaut ist, als Variable nur $z/a = \bar{z}$ auftritt, lassen sich die für eine bestimmte Querzahl ν und $a = 1$ berechneten Funktionswerte unter einfacher Maßstabänderung für beliebige Halbmesser a der zylindrischen Öffnung verwenden, wobei die für $\bar{z}$ berechneten Funktionswerte über den Abszissen $z = a\,\bar{z}$ aufzutragen sind.

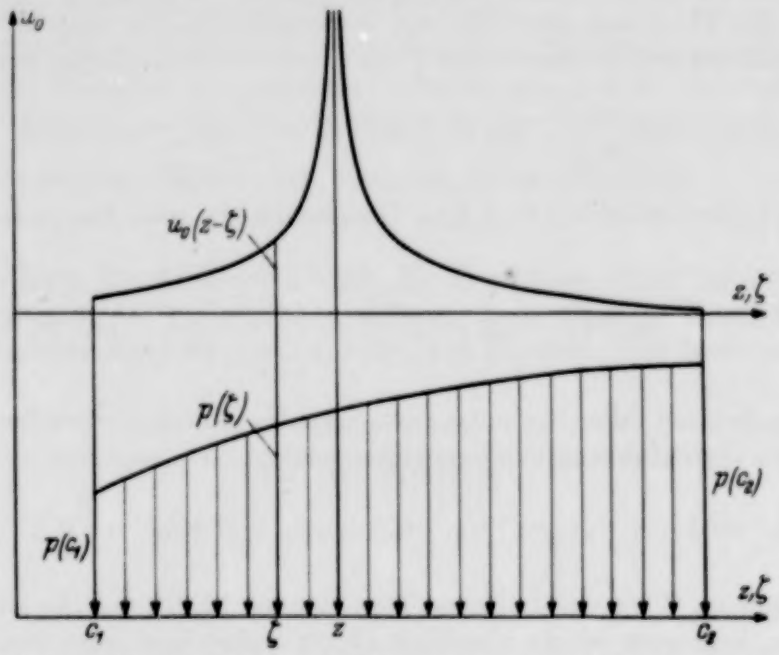

Abb. 3. Radialverschiebungen zufolge einer beliebigen rotationssymmetrischen Innendruckverteilung:

$$u(z) = \int_{c_1}^{z} u_0(z-\zeta)\,p(\zeta)\,d\zeta + \int_{z}^{c_2} u_0(\zeta-z)\,p(\zeta)\,d\zeta\,.$$

Ist der mit $p(\zeta)$ belastete Bereich durch die Querschnitte c_1 und $c_2 > c_1$ begrenzt (Abb. 3), so gilt, wenn wir die Einflußfunktion abkürzend mit

$$u_P(z) = u_0(z)$$

bezeichnen, für einen innerhalb des Lastbereiches liegenden Punkt z mit $c_1 < z < c_2$

$$u(z) = \int_{c_1}^{z} u_0(z-\zeta)\,p(\zeta)\,d\zeta + \int_{z}^{c_2} u_0(\zeta-z)\,p(\zeta)\,d\zeta \tag{112}$$

und für einen außerhalb des Lastbereiches liegenden Punkt mit $c_1 < c_2 < z$

$$u(z) = \int_{c_1}^{c_2} u_0(z-\zeta)\,p(\zeta)\,d\zeta \tag{113}$$

und analog für $z < c_1 < c_2$

$$u(z) = \int_{c_1}^{c_2} u_0(\zeta-z)\,p(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{114}$$

Mit Hilfe der Einflußfunktion $u_0(z,\zeta)$ lassen sich ferner allgemeine Schlüsse über den Verlauf der von beliebigen Belastungen $p(\zeta)$ bewirkten Radialverschiebungen $u(z)$ des Zylindermantels ziehen. Aus der quellenmäßigen Darstellung der innerhalb des Lastbereiches $c_1 < z < c_2$ auftretenden Verschiebungen gemäß (112)

$$u(a,z) = \int_{c_1}^{z} u_0(z-\zeta)\,p(\zeta)\,d\zeta + \int_{z}^{c_2} u_0(\zeta-z)\,p(\zeta)\,d\zeta\,,$$

in der die Belastungsfunktion $p(\zeta)$ positiv und samt ihrer ersten Ableitung im offenen Bereich $c_1 < \zeta < c_2$ stetig und beschränkt sei, ist zunächst zu ersehen, daß $u_0(z-\zeta)$ bzw. $u_0(\zeta-z)$ für verschwindendes Argument nur logarithmisch unendlich werden kann, da andernfalls die

beiden positiven Integrale divergent würden. Auf diese, für die *Green*sche Funktion in zweidimensionalen Bereichen kennzeichnende Singularität führt auch unser Näherungsverfahren, und zwar gilt für verschwindendes Argument d. h. für $\zeta \to z$ mit (104) und (111)

$$u_0 = -\frac{1}{2G}\,\frac{2(1-\nu)}{\pi}\,\ln\frac{z-\zeta}{a}\,. \tag{115}$$

Der zweidimensionale Bereich ist im vorliegenden Falle durch den Zylindermantel gegeben, wobei zufolge der Rotationssymmetrie anstelle der punktförmigen hier die linienförmige Quelle tritt. Wir berechnen nun die Ableitung von (112), die bei Beachtung der singulären Stellen z des Integranden unter Einführung der kleinen Größe ε aus einem Grenzübergang gewonnen wird,

$$u'(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{d}{dz}\left[\int_{c_1}^{z-\varepsilon} u_0(z-\zeta)\,p(\zeta)\,d\zeta + \int_{z+\varepsilon}^{c_2} u_0(\zeta-z)\,p(\zeta)\,d\zeta\right]$$

und erhalten durch Differentiation unter dem Integralzeichen und Anwendung der *Leibniz*schen Regel zunächst

$$u'(z) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{c_1}^{z-\varepsilon} \frac{\partial u_0(z-\zeta)}{\partial z}\,p(\zeta)\,d\zeta + u_0(\varepsilon)\,p(z-\varepsilon) + \int_{z+\varepsilon}^{c_2} \frac{\partial u_0(\zeta-z)}{\partial z}\,p(\zeta)\,d\zeta - u_0(\varepsilon)\,p(z+\varepsilon)\right].$$

Bei der partiellen Integration fallen die mit $\varepsilon \to 0$ gegen Unendlich strebenden Glieder $u_0(\varepsilon)$ heraus und wir erhalten nach Durchführung des Grenzüberganges

$$u'(z) = u_0(z-c_1)\,p(c_1) + \int_{c_1}^{z} u_0(z-\zeta)\,p'(\zeta)\,d\zeta - u_0(c_2-z)\,p(c_2) + \int_{z}^{c_2} u_0(\zeta-z)\,p'(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{116}$$

Der durch (116) gegebene Wert des Differentialquotienten bleibt für alle innerhalb des offenen Bereiches $c_1 < z < c_2$ liegenden Werte z endlich. Fällt z aber mit einer der beiden Lastgrenzen zusammen, dann können die Differentialquotienten nur beschränkt bleiben, wenn die Belastungsfunktion $p(\zeta)$ dort verschwindet.

Bei Lastfunktionen, die an den Grenzen c_m $(m = 1, 2)$ unstetig auf Null abfallen, muß der dort auftretende Differentialquotient der Funktion $u(z)$ daher singulär werden. Die logarithmische Singularität von $u'(z)$ — es handelt sich hierbei offenbar um die Tangente im Nullpunkt der Funktion $t \ln t$ mit $t = |z - c_m|/a$ — wird im allgemeinen schwach sein. In der graphischen Darstellung des Gesamtverlaufes der Radialverschiebungen tritt sie daher, zumindest bei kleineren Maßstäben, kaum in Erscheinung.

Die für die Radialverschiebungen erhaltene Funktion $u(a, z)$ genügt, wie schon betont wurde, obwohl sie auf Grund einer Approximation des Integranden (39) berechnet wurde, sämtlichen Grenzbedingungen. Dies beruht darauf, daß der Funktionsverlauf im wesentlichen durch das Verhalten des Integranden in der Nähe des Nullpunktes und im Unendlichen bestimmt ist; in unserer Berechnung wird dies durch die aus (50) folgende Näherung (51) bzw. durch die Verwendung der asymptotischen Entwicklung (59) der Funktion

$$f(\lambda) = \lambda^2\left[1 - \left(\frac{K_0}{K_1}\right)^2\right]$$

berücksichtigt.

Eine absolute Gewähr für die Güte des Näherungsverfahrens bietet die notwendige Erfüllung der Grenzbedingungen nicht. Will man die numerische Genauigkeit erhöhen, so läßt sich das am einfachsten durch die weitere Unterteilung des Intervalles $\omega_1 = 0{,}5 < \lambda < \omega_2 = 3{,}00$ erreichen. Eine andere Möglichkeit der exakteren Erfassung des Integranden, wie sie etwa in der Annäherung der Funktion $f(\lambda)$ im Bereich stärkerer Krümmung durch quadratische oder noch besser kubische Parabeln bestünde, bringt eine bedeutende Erhöhung des Rechenaufwandes, da die Integrale, die dann anstelle von (82) treten, durch Partialbruchzerlegung auszuwerten wären. Die hierbei auftretenden komplexen Funktionen Si $(\xi + i\,\eta)$, Ci $(\xi + i\,\eta)$ sind tabuliert[1], so daß dieser Weg in besonderen Fällen gangbar wäre.

Schließlich könnte die asymptotische Näherung der Funktion $f(\lambda)$ bereits von $\omega_1 = 0{,}5$ an verwendet und die für größere Argumente λ gegen Null gehende Restfunktion numerisch aus-

[1] *M. Mashiko*, Tables of generalized exponential-, sine-, and cosine integrals, Numerical computation Bureau, Tokio 1953

gewertet, oder durch eine einfachere Funktion approximiert und geschlossen integriert werden. Das erstere würde allerdings den Verzicht auf einen allgemeinen Überblick über die Funktion $u(a, z)$ bedeuten, da die Auswertung für spezielle Werte von z durchzuführen wäre. Im zweiten Fall erhält man bei einer halbwegs genauen Annäherung der Restfunktion vielgliedrige Ausdrücke, deren numerische Auswertung äußerst mühsam ist.

Die Erweiterung des Giltigkeitsbereiches der asymptotischen Näherung bis $\lambda = 0$ führt ohne Berücksichtigung der Restfunktion — und das gilt ebenso für die Berechnung der Radialverschiebungen des Vollzylinders — auf unrichtige Ergebnisse.

Die theoretisch in Betracht kommende Anwendung des Residuensatzes bringt schließlich in der Auflösung von $n \to \infty$ Paaren transzendenter Gleichungen, auf die die Bestimmung der komplexen Nullstellen im Nenner des Integranden führt, in der Untersuchung der Konvergenz von $\sum_1^\infty$ Res usw. eine Fülle weiterer, bisher noch kaum behandelter Probleme.

5. Zahlenbeispiel. Zum Abschluß seien noch die Ergebnisse einer numerischen Berechnung mitgeteilt. Der Querschnitt der zylindrischen Öffnung habe einen Halbmesser von $a = 1{,}41$ m, die halbe Länge des Lastbereiches sei durch $c = 0{,}875$ m gegeben. Das Material habe die Querzahl

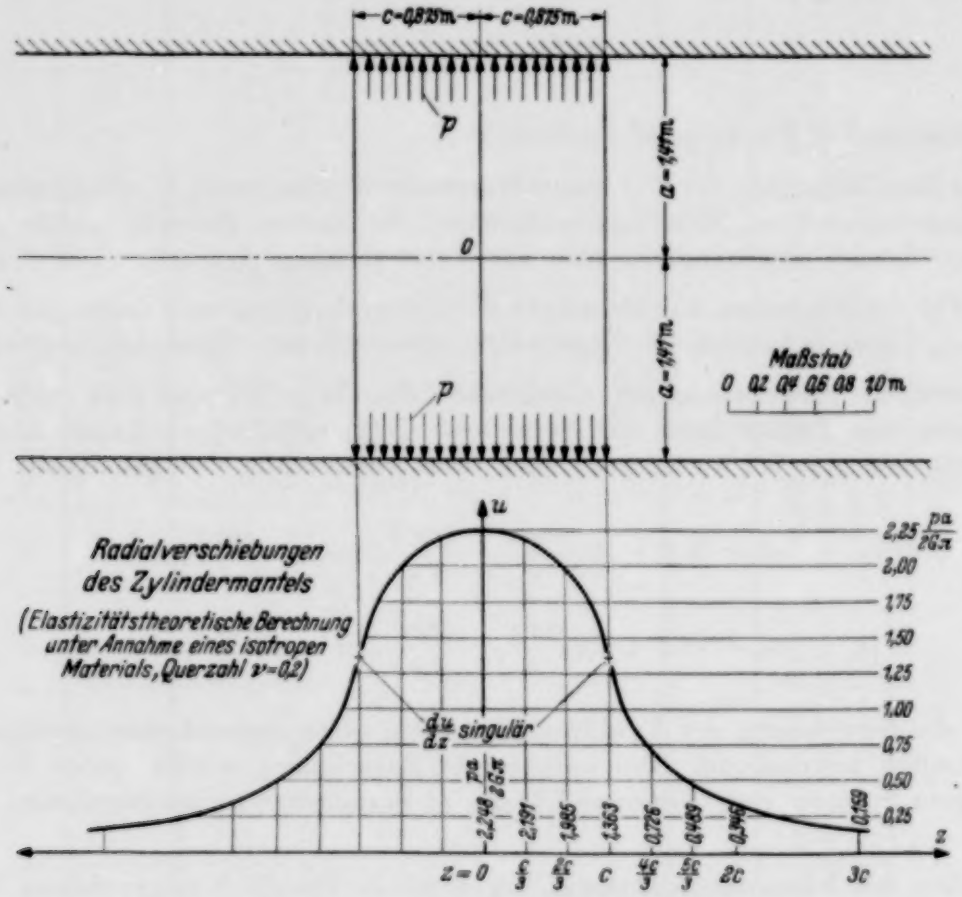

Abb. 4. Zylindrische Öffnung im unendlichen Raum unter örtlichem hydrostatischem Druck; Zahlenbeispiel.

$\nu = 0{,}2$, während für den Schubmodul G und die Belastungsintensität p keine speziellen Annahmen getroffen werden. Die Radialverschiebungen u werden für die Querschnitte

$$z = 0\,, \quad \frac{1}{3}\,c\,, \quad \frac{2}{3}\,c\,, \quad c\,, \quad \frac{4}{3}\,c\,, \quad \frac{5}{3}\,c\,, \quad 2\,c\,, \quad 3\,c$$

berechnet.

Der unendliche Integrationsbereich wurde in vier Teilintervalle $\omega_{k-1} < \lambda < \omega_k$ aufgespalten, in denen die Funktion

$$\lambda^2 \left[1 - \left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right]$$

mit hinreichender Genauigkeit durch die Näherungsfunktionen $f_k(\lambda)$ ersetzt werden kann (Tabelle 1)

Tabelle 1

$0 = \omega_0 < \lambda < \omega_1 = 0{,}5$	$f_1(\lambda) = \beta_1 \lambda^4 + \lambda^2$
$\omega_1 < \lambda < \omega_2 = 3{,}0$	$f_2(\lambda) = \mu_2 \lambda + \varkappa_2'$
$\omega_2 < \lambda < \omega_3 = 15{,}0$	$f_3(\lambda) = \mu_3 \lambda + \varkappa_3'$
$\omega_3 < \lambda < \omega_4 \to \infty$	$f_4(\lambda) = \lambda - 1$

Zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten β_1, μ_k und $\varkappa_k'$ sind vorerst die exakten Werte der Funktion

$$f(\lambda) = \lambda^2 \left[1 - \left(\frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)}\right)^2\right]$$

für eine Reihe von Argumenten zu berechnen. In den Tafelwerken findet man entweder die Funktionen $K_0(x)$ und $K_1(x)$ selbst oder die Funktionen $e^x K_0(x)$ und $e^x K_1(x)$[1], oder schließlich die mit den modifizierten Besselfunktionen durch die Beziehungen

$$i\, H_0^{(1)}(i\, x) = \frac{2}{\pi} K_0(x)$$

und

$$-\, H_1^{(1)}(i\, x) = \frac{2}{\pi} K_1(x)$$

verbundenen *Hankel*schen Funktionen[2] tabuliert vor.

Mit den aus dem Minimum der Fehlerquadratsummen erhaltenen Koeffizienten folgen die in Tabelle 2 zusammengestellten Näherungsfunktionen; im ersten Bereich wurde $f(\lambda)$ durch ein Polynom vierten Grades approximiert, also zur Vereinfachung $\beta_2 = \beta_3 = \ldots 0$ gesetzt.

Die aus diesen Fehlern folgenden Abweichungen der Integrale liegen weit innerhalb der bei elastizitätstheoretischen Untersuchungen im allgemeinen erforderlichen Genauigkeitsgrenzen.

Für die numerische Auswertung der Ausdrücke (93), (94), (97) und (98) reichen die etwa in dem Tabellenwerk von *Jahnke-Emde* für Si (x) und Ci (x) enthaltenen Tafeln nicht aus, da die Argumentschritte von $x = 5{,}0$ an zu groß sind. Die Auswertung der genaueren Interpolationsformeln

$$\mathrm{Si}\,(x + \Delta x) = \mathrm{Si}\, x + \Delta x \frac{\sin x}{x} + \frac{(\Delta x)^2}{2x}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right) + \cdots$$

$$\mathrm{Ci}\,(x + \Delta x) = \mathrm{Ci}\, x + \Delta x \frac{\cos x}{x} - \frac{(\Delta x)^2}{2x}\left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right) + \cdots$$

ist, ebenso wie die Berechnung der Funktionen aus den oben angegebenen asymptotischen Entwicklungen, ziemlich zeitraubend. Die vorliegende Berechnung wurde unter Verwendung der in den Vereinigten Staaten vom National Bureau of Standards[3] herausgegebenen Tafeln durchgeführt.

Die Integration der Näherungsfunktionen ergab die in Tabelle 3 angegebenen Werte u_k.

Man sieht, daß der vom letzten, unendlichen Integrationsbereich gelieferte Beitrag zu den Verschiebungswerten klein gegenüber den anderen ist. In Abb. 4 ist der Verlauf der Verschiebungen dargestellt; die in $\pm c$ auftretende Singularität der Ableitung wurde bereits erörtert.

Beim Aneinanderreihen mehrerer Lastbereiche der Länge 2 c müssen die Koeffizienten von $p\, a/2\, G\, \pi$ gegen π gehen: so erhält man z. B. für die Mittelordinate einer zum Ursprung symmetrischen Lastverteilung der Länge $6\,c$ aus der Überlagerung der für die Belastungslänge $2\,c$ berechneten Werte

$$u_{6c}(0) = u_{2c}(0) + 2\, u_{2c}(2\,c)\,,$$

[1] *G. N. Watson*, a. a. O. S. 699 ff.
[2] *Jahnke-Emde*, a. a. O. S. 232 ff.
[3] Nat. Bur. of Stand., Tables of sine-, cosine- and exponentialsintegrals, vol. I. and II., New York, 1940; Nat. Bur. of Stand., Tables of sine- and cosine-integrals (für Argumente von 10,0 bis 100,0) New York 1954; Nat. Bur. of Stand., Tables of exponential-integrals for Complex Argument, New York 1951.

Tabelle 2

Nr.	Bereich ϱ_{k-1}	Bereich ϱ_k	β_1	μ_k	$\varkappa'_k$	f_k	$\varkappa_k = -2(1-\nu)+\varkappa'_k$	Nenner in (52) bzw. (56)	mittl. Fehler $100\,\frac{2(1-\nu)+f(\lambda)}{2(1-\nu)+f_k(\lambda)}$
1	0	0,5	—1,45	—	—	$-1{,}452\,\lambda^4+\lambda^2$	—	$\lambda^2-1{,}452\,\lambda^4+1{,}6$	0,4%
2	0,5	3,0	—	0,843	—0,307	$0{,}843\,\lambda-0{,}307$	$+1{,}293$	$0{,}843\,\lambda+1{,}293$	1,6%
3	3,0	15,0	—	0,985	—0,730	$0{,}985\,\lambda-0{,}730$	$+0{,}870$	$0{,}985\,\lambda+0{,}870$	1,4%
4	15,0	$\to\infty$	—	1,0	—1,0	$\lambda-1$	$1-2\,\nu=0{,}6$	$\lambda+0{,}6$	$<0{,}4\%$

Tabelle 3

Integr.-Bereich \ $z=$	0	$\frac{c}{3}$	$\frac{2c}{3}$	c	$\frac{4c}{3}$	$\frac{5c}{3}$	$2c$	$3c$	Faktor	$z<c$ Gleichung	$z>c$ Gleichung
0 ↔ 0,5	+0,595	+0,594	+0,591	+0,586	+0,579	+0,570	+0,559	+0,519	$\frac{p\,a}{2\,G\,\pi}$	(89)	(90)
0,5 ↔ 3,0	+1,556	+1,470	+1,228	+0,878	+0,480	+0,102	—0,204	—0,487		(93)	(94)
3,0 ↔ 15,0	+0,117	+0,1045	+0,195	—0,106	—0,352	—0,172	—0,016	+0,129		(93)	(94)
15,0 ↔ ∞	—0,020	+0,0225	—0,029	+0,005	+0,019	—0,011	+0,007	—0,003		(97)	(98)
$u=$	+2,248	+2,191	+1,985	+1,363	+0,726	+0,489	+0,346	+0,159		(99)	(100)

woraus mit den Zahlenwerten der Tabelle 3

$$u_{6c}(0) = (2{,}248 + 2 \cdot 0{,}346)\,\frac{p\,a}{2\,G\,\pi} = 2{,}94\,\frac{p\,a}{2\,G\,\pi}$$

folgt. Für den Größtwert der Radialverschiebungen zufolge einer in bezug auf den Querschnitt $z = +c$ symmetrischen Lastaufteilung der Länge $8\,c$ ergibt sich allgemein

$$u_{8c\,max} = 2\,(u_{2c}(c) + u_{2c}(3\,c))$$

und mit den Zahlenwerten

$$u_{8c\,max} = 2\,(1{,}363 + 0{,}159)\,\frac{p\,a}{2\,G\,\pi} = 3{,}044\,\frac{p\,a}{2\,G\,\pi}\,.$$

Da der Faktor von $p\,a/2\,G\,\pi$ den Wert π erst mit $\lim_{n\to\infty} n\,c$ erreichen kann, lassen sich die vorstehenden Beziehungen zur überschlägigen Kontrolle der numerischen Rechnung benützen.

6. Zusammenfassung. Für den Fall eines unter örtlichem Innendruck stehenden zylindrischen Hohlraumes im unendlichen, elastisch-isotropen Körper, wurde die *Love*sche Verschiebungsfunktion bestimmt, wobei hier auf eine Arbeit von *C. J. Tranter* zurückgegriffen werden konnte. Die Ausweitung des Zylindermantels wurde sowohl für diese Belastung und, um die Einflußfunktion der Radialverschiebungen zu erhalten, auch für die in einem Querschnitt konzentrierte Druckverteilung allgemein berechnet. Die Auswertung der uneigentlichen Integrale erfolgt durch Aufspaltung des unendlichen Integrationsbereiches und Ersatz des Integranden durch geeignete Näherungsfunktionen, deren Abweichungen von den wahren Werten in der Umgebung des Nullpunktes und im Unendlichen verschwinden.

Das hier geschilderte Verfahren könnte in analoger Weise zur Bestimmung der Radialverschiebungen des unendlich langen Vollzylinders und gegebenenfalls auch des unendlich langen zylindrischen Rohres angewandt werden.

(Eingegangen am 3. Dezember 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dozent Dipl.-Ing. Dr. *Erwin Tremmel*, Salzburg (Österreich), Schwarzstr. 31.

Berechnung der Druckverteilung von ebenen Schaufelgittern mit stark gewölbten dicken Profilen bei inkompressibler Strömung*

Von W. Richter

1. Einleitung. Eine der Grundaufgaben bei der Berechnung der Strömung in Turbomaschinen ist die Bestimmung der Strömung im Schaufelgitter. Hier soll dazu die Strömung im axialen Schaufelgitter, das bei der Abwicklung eines koaxialen Schnittes durch das Schaufelrad entsteht, berechnet werden. Gelöst wird die sog. zweite Hauptaufgabe (Direct Problem): Bestimmung der reibungsfreien, inkompressiblen Strömung in einem gegebenen Gitter. Als Lösung ergeben sich Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs der Schaufelkontur, sowie Schaufelkraft und Abströmrichtung in Abhängigkeit von der Zuströmrichtung. Aufbauend auf diesen Ergebnissen können der Einfluß der Reibung und damit Strömungsverluste und Wirkungsgrad nach dem Berechnungsverfahren von *L. Speidel* und *N. Scholz*[1] ermittelt werden. Ebenso kann das hier beschriebene Verfahren nach einer Arbeit von *H. Schlichting* und *E. G. Feindt*[2] auf die Berechnung der kompressiblen Gitter-Strömung erweitert werden.

Eine grundsätzliche Lösung dieser Aufgabe, die jedoch in der rechnerischen Durchführung sehr mühsam ist, liegt bereits vor: Nach *W. Traupel*[3] kann man das gegebene Gitter durch mehrfache konforme Abbildung in eine kreisähnliche Kontur überführen. Für diese wird dann der Potentialverlauf iterativ bestimmt und auf das Gitter zurück übertragen. Dabei erhält man die gesuchten Lösungen nach einem numerisch-graphischen Verfahren und mit einem Rechenaufwand, der für ein Gitter bei fünf verschiedenen Zuströmwinkeln etwa 200 Stunden beträgt (vgl. *G. Hubert*[4]). Nach *H. Schlichting*[5] wird das Strömungsfeld aus einer Singularitätenbelegung auf der Profilsehne aufgebaut, wobei das gegebene Gitter durch geschlossene Stromlinien dargestellt wird. Zusammen mit der überlagerten Translationsströmung ergeben die von den Belegungen induzierten Geschwindigkeiten die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung längs der Kontur. Bei *W. Isay*[6] wird das Strömungsfeld mit einer Zirkulationsverteilung längs der Kontur erzeugt.

Von diesen bekannten Lösungen erfordert das Verfahren von *H. Schlichting* den weitaus geringsten Berechnungsaufwand. Jedoch ist es auf Profile mit mäßiger Wölbung und mäßiger Dicke beschränkt. Ziel der vorliegenden Weiterentwicklung des Berechnungsverfahrens ist es, diese Beschränkungen aufzuheben, ohne den Berechnungsaufwand allzu sehr zu erhöhen. Hierbei soll ein potentialtheoretisches Berechnungsverfahren für Schaufelgitter mit beliebigen Profilen entwickelt werden, das mit einfachen Hilfsmitteln (Tischrechenmaschine und Rechenschieber) und mit einem erträglichen Aufwand durchführbar ist[7].

Mit dem nachstehend beschriebenen Verfahren wird der von *H. Schlichting* eingeschlagene Weg fortgeführt. Wie dort werden Singularitätenverteilungen vorgegeben, die in Anlehnung an die Wirbelverteilungen von *W. Birnbaum*[8] ausgewählt wurden. Sie werden auf einer gewölbten Skelettlinie im Inneren des Profiles angeordnet. Die induzierten Geschwindigkeiten werden zum Teil wie bei *A. Betz*[9]

* Gekürzte Fassung der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Braunschweig genehmigten gleichnamigen Dissertation 1959. Berichter Prof. Dr. *H. Schlichting*; Mitberichter Prof. Dr. *H. Petermann*.

[1] *L. Speidel* und *N. Scholz*, Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern, VDI-Forsch.-Heft 464, Düsseldorf 1958. — Eine kurze Zusammenfassung davon ist gegeben in *H. Schlichting*, Anwendung der Grenzschichttheorie auf Strömungsprobleme der Turbomaschinen, Siemens-Zeitschrift, 33 (1959), S. 429—438, vgl. auch: Journ. Basic Eng. ASME (1959), S. 543—551.

[2] *H. Schlichting* und *E. G. Feindt*, Forsch. Ing. Wes. 24 (1958), S. 19—28, vgl. auch Z. angew. Math. Phys. 9b, (1958) S. 274—284.

[3] *W. Traupel*, Die Berechnung der Potentialströmung durch Schaufelgitter, Sulzer Techn. Rundsch. Nr. 1 (1945) und Nr. 2 (1948).

[4] *G. Hubert*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. 9 (1957), S. 106—114.

[5] *H. Schlichting*, Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter, VDI-Forsch.-Heft 447, Düsseldorf 1955.

[6] *W. Isay*, Z. angew. Math. Mech. 33 (1953), S. 397—409 und Z. angew. Math. Mech. 37 (1957), S. 321—335.

[7] An der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen ist zur gleichen Zeit der Ansatz von *W. Isay* weiter entwickelt worden. Dabei konnte der Rechenaufwand durch Einsatz elektronischer Rechenanlagen auf sehr kurze Rechenzeiten herabgesetzt werden, vgl. *E. Martensen*, Arch. Rational Mech. Anal. 3 (1959) S. 235.

[8] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 290—297.

[9] *A. Betz*, Ing. Arch. 2 (1931), S. 359—371.

mit Diagrammen, zum Teil wie bei *H. Schlichting* mit Tabellen berechnet. Zirkulations- und Quellstärken ergeben sich auch hier aus einem linearen Gleichungssystem. Die so erzielte Lösung wird ähnlich wie bei dem Verfahren von *H. Krüger*[1] abschließend verbessert. Auf diese Weise ist es gelungen, den Rechenaufwand für die Ermittlung der Druckverteilung eines Gitters bei fünf verschiedenen Zuströmwinkeln auf etwa 50 Stunden herabzusetzen.

2. Grundlagen des Berechnungsverfahrens. a) Schaufelkraft und Umlenkung der Strömung im Gitter. Das Strömungsfeld der vorgegebenen unendlichen Schaufelreihe ergibt sich durch Überlagerung einer Translationsströmung W_∞ mit gewissen Wirbel- und Quellsenkenverteilungen in jeder Schaufel. Diese Verteilungen werden weiter unten näher angegeben. Die Schaufelkraft wird dabei aus der Gleichung von *Kutta-Joukowsky* erhalten. Hiernach ergibt sich nach Abb. 1 für den Auftrieb A einer Schaufel

$$A = \varrho\, b\, W_\infty\, \Gamma\,. \tag{1}$$

Dabei bedeutet ϱ die Dichte des strömenden Mediums, b die Breite der Schaufel (senkrecht zur Strömungsebene), Γ die Gesamtzirkulation einer Schaufel und W_∞ die sog. Translationsgeschwindigkeit, die nach Abb. 1 gleich dem vektoriellen Mittel der Zuströmgeschwindigkeit W_I und der Abströmgeschwindigkeit W_II ist. Diese resultierende Kraft A steht senkrecht auf W_∞. Sie möge nach Abb. 1 in die Umfangskomponente $P_y = A \sin\beta_\infty$ und in die Axialkomponente $P_x = A\cos\beta_\infty$ zerlegt werden. Führt man dabei noch die Durchsatzgeschwindigkeit $U = W_\infty \sin\beta_\infty$ ein, so ergibt sich für die durch

$$P_y = c_y \frac{\varrho}{2} U^2\, b\, l \qquad \text{und} \qquad P_x = c_x \frac{\varrho}{2} U^2\, b\, l \tag{2}$$

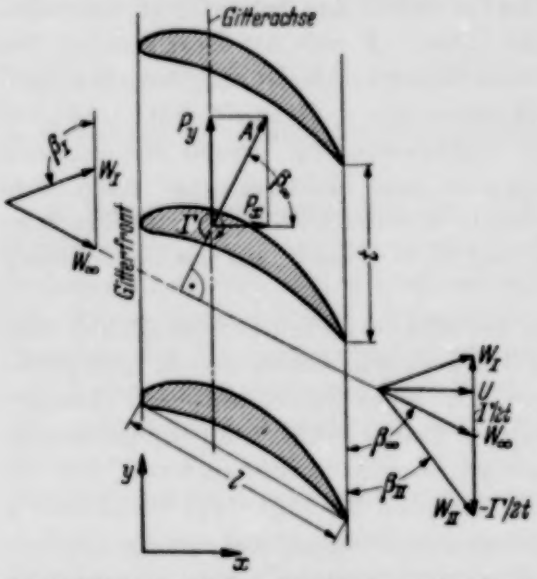

Abb. 1. Schaufelkräfte, Zu- und Abströmung des Gitters. A Auftrieb einer Schaufel mit den Komponenten P_y in Umfangs- und P_x in Achsrichtung; Γ Gesamtzirkulation einer Schaufel; W_I Zuströmgeschwindigkeit weit vor, W_II Abströmgeschwindigkeit weit hinter dem Gitter; U Durchsatzgeschwindigkeit (Komponente von W_I und W_II senkrecht zur Gitterfront); W_∞ überlagerte Translationsgeschwindigkeit; $\Gamma/2t$ und $-\Gamma/2t$ weit vor bzw. hinter dem Gitter induzierte Geschwindigkeiten der Wirbelreihe Γ; β_I und β_II Zu- bzw. Abströmwinkel; β_∞ Winkel von W_∞ gegen die Gitterfront; t Teilung; l Schaufeltiefe.

definierten Kraftbeiwerte

$$c_y = \frac{2\,\Gamma}{l\,U} \qquad \text{und} \qquad c_x = \frac{2\,\Gamma}{l\,U}\operatorname{ctg}\beta_\infty\,. \tag{3}$$

Dabei wurde als Bezugslänge die Länge l der Schaufelsehne eingeführt. Der Winkel β_∞ ist der Zuströmwinkel der überlagerten Translationsströmung W_∞.

Die Umlenkung $\beta_\mathrm{I} - \beta_\mathrm{II}$ ist der Unterschied der Strömungsrichtungen weit vor und weit hinter dem Gitter. Dort wirkt die Wirbelreihe Γ (Abb. 1) wie eine kontinuierliche konstante Wirbelverteilung $\gamma = \Gamma/t$ längs der Gitterachse. Sie induziert weit vor dem Gitter die Geschwindigkeit $v_i = +\gamma/2 = +\Gamma/2\,t$ und weit hinter dem Gitter die Geschwindigkeit $v_i = -\gamma/2 = -\Gamma/2\,t$ parallel zur Gitterachse. Damit ergibt sich nach Abb. 1 für den Zuströmwinkel β_I bzw. den Abströmwinkel β_II:

$$\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I} = \operatorname{ctg}\beta_\infty - \Gamma/2\,t\,U \qquad \text{und} \qquad \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{II} = \operatorname{ctg}\beta_\infty + \Gamma/2\,t\,U = \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I} + \Gamma/t\,U\,. \tag{4}$$

Führt man noch die dimensionslose Gesamtzirkulation

$$\Gamma^* = \Gamma/2\,l\,U \tag{5}$$

ein, so gilt nach (3):

$$c_y = 4\,\Gamma^*\,, \qquad c_x = 4\,\Gamma^*\,(\Gamma^*\,l/t + \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I})\,, \tag{6}$$

$$\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{II} = \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I} + 2\,\Gamma^*\,l/t\,, \qquad \operatorname{ctg}\beta_\infty = \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I} + \Gamma^*\,l/t\,. \tag{7}$$

Somit ist die dimensionslose Zirkulation Γ^* die einzige Größe, die zur Ermittlung von Schaufelkraft und Umlenkung der Strömung im Gitter bestimmt werden muß. Sie kann, wie sich später noch zeigen wird, als lineare Funktion von $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$ angegeben werden.

b) Induzierte Geschwindigkeiten der Einzelsingularitäten. Die gesuchte Geschwindigkeitsverteilung auf der Schaufelkontur ergibt sich, indem für jeden Konturpunkt die

[1] *H. Krüger*, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 242—267.

Summe der induzierten Geschwindigkeiten aller Singularitäten zur überlagerten Translationsströmung addiert wird. Hierzu sollen zunächst die induzierten Geschwindigkeiten der Einzelsingularitäten bestimmt werden.

Gegeben sei nach Abb. 2 die Einzelsingularität $S = Q + i\,\Gamma$ (bestehend aus Quelle Q und Wirbel Γ) im Nullpunkt der z-Ebene. Nach *Biot-Savart* induziert sie im Punkt $z = x + i\,y$ die komplexe Geschwindigkeit

$$w_i = u_i - i\,v_i = \frac{S}{2\,\pi\,z} = \frac{(Q + i\,\Gamma)\,(x - i\,y)}{2\,\pi\,(x^2 + y^2)}\,. \tag{8}$$

Dabei weist die Komponente u_i in x-Richtung, die Komponente v_i in y-Richtung.

Entsprechend gilt für die Singularitätenreihe bei der gemäß Abb. 2 auf der y-Achse im Abstand t eine unendliche Reihe von gleichen Singularitäten S angeordnet ist, nach *Pistolesi*[1]

$$w_i = u_i - i\,v_i = \frac{S}{2\,t}\operatorname{Ctg}\frac{\pi\,z}{t}$$

$$= \frac{(Q + i\,\Gamma)\,(\operatorname{Sin}[2\,\pi\,x/t] - i\,\sin[2\,\pi\,y/t])}{2\,t\,(\operatorname{Cof}[2\,\pi\,x/t] - \cos[2\,\pi\,y/t])}\,. \tag{9}$$

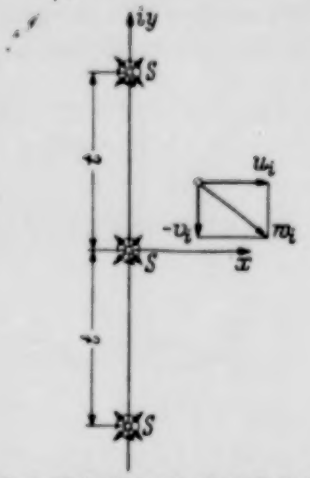

Abb. 2. Induzierte Geschwindigkeiten einer Singularitätenreihe. S Singularität bestehend aus Quelle Q und Wirbel Γ; t Teilung (gegenseitiger Abstand der unendlich vielen Singularitäten in Richtung der Gitterfront); w_i induzierte Geschwindigkeit mit den Komponenten u_i senkrecht zur Gitterfront und v_i in Richtung der Gitterfront.

Durch Einführung der dimensionslosen Werte

$$u_i^* = \frac{u_i}{U}\,, \qquad v_i^* = \frac{v_i}{U}\,, \qquad Q^* = \frac{Q}{2\,l\,U}\,, \qquad \Gamma^* = \frac{\Gamma}{2\,l\,U} \tag{10}$$

und der Einflußfunktionen

$$\dot\mu_E = \frac{l\,x}{\pi\,(x^2 + y^2)}\,, \qquad \dot\nu_E = \frac{l\,y}{\pi\,(x^2 + y^2)}\,, \tag{11a}$$

$$\dot\mu = \frac{\operatorname{Sin}(2\,\pi\,x/t)}{\operatorname{Cof}(2\,\pi\,x/t) - \cos(2\,\pi\,y/t)}\,, \qquad \dot\nu = \frac{\sin(2\,\pi\,y/t)}{\operatorname{Cof}(2\,\pi\,x/t) - \cos(2\,\pi\,y/t)}\,, \tag{11b}$$

$$\dot\mu_R = \dot\mu - \dot\mu_E\,t/l\,, \qquad \dot\nu_R = \dot\nu - \dot\nu_E\,t/l \tag{11c}$$

ergibt sich für die induzierten Geschwindigkeiten u_i^* und v_i^* der Einzelsingularität aus (8):

$$u_i^* = Q^*\,\dot\mu_E + \Gamma^*\,\dot\nu_E\,, \qquad v_i^* = Q^*\,\dot\nu_E - \Gamma^*\,\dot\mu_E\,, \tag{12a}$$

der Singularitätenreihe aus (9):

$$u_i^* = (Q^*\,\dot\mu + \Gamma^*\,\dot\nu)\,l/t\,, \qquad v_i^* = (Q^*\,\dot\nu - \Gamma^*\,\dot\mu)\,l/t\,. \tag{12b}$$

Ferner gilt für die später benötigte sog. Singularitäten-Restreihe, bei der die Einzelsingularität im Nullpunkt fortgelassen ist:

$$u_i^* = (Q^*\,\dot\mu_R + \Gamma^*\,\dot\nu_R)\,l/t\,, \qquad v_i^* = (Q^*\,\dot\nu_R - \Gamma^*\,\dot\mu_R)\,l/t\,. \tag{12c}$$

Die Einflußfunktionen (11) sind für die numerische Rechnung in Abb. 3 aufgetragen.

c) Vorgegebene linienhafte Verteilungen und Belegungslinie. Sowohl beim Einzelflügel, als auch beim Schaufelgitter sind zur Darstellung des Strömungsfeldes linienhafte Singularitätenverteilungen besser geeignet als Einzelsingularitäten. Diese Verteilungen werden auf einer Belegungslinie (Skelettlinie) vorgegeben.

Bei unendlich dünnen Profilen stimmt die Skelettlinie mit der Profilkontur überein. Bei dicken Profilen wird sie so im Profilinneren gewählt, daß ihr Abstand von der Saugseite etwa halb so groß ist wie von der Druckseite. Kleine Krümmungsradien und starke Änderung der Krümmung werden nach Möglichkeit vermieden. Als Anfangs- und Endpunkt der Skelettlinie werden die Mitte zwischen der Nase und deren Krümmungsmittelpunkt bzw. der Hinterkante und deren Krümmungsmittelpunkt gewählt (siehe Abb. 6 und 7).

Während zur Berechnung unendlich dünner Profile eine linienhafte Wirbelverteilung $\gamma(\zeta)$ längs der Skelettlinie $z(\zeta)$ genügt, ist bei dicken Profilen außerdem noch eine linienhafte Quell-

[1] *E. Pistolesi*, Aerotechnica 17 (1937) und 18 (1938).

Senken-Verteilung $q(\zeta)$ längs der Skelettlinie erforderlich. Zur Darstellung dieser linienhaften Singularitätenverteilung $s(\zeta)$ dient der Reihenansatz

$$s(\zeta) = q(\zeta) + i\,\gamma(\zeta) = \frac{2\,l\,U}{3\,l_f} \sum_{\tau=1}^{n} (Q_\tau^* + i\,\Gamma_\tau^*)\,\sigma_\tau(\tau)\,. \tag{13}$$

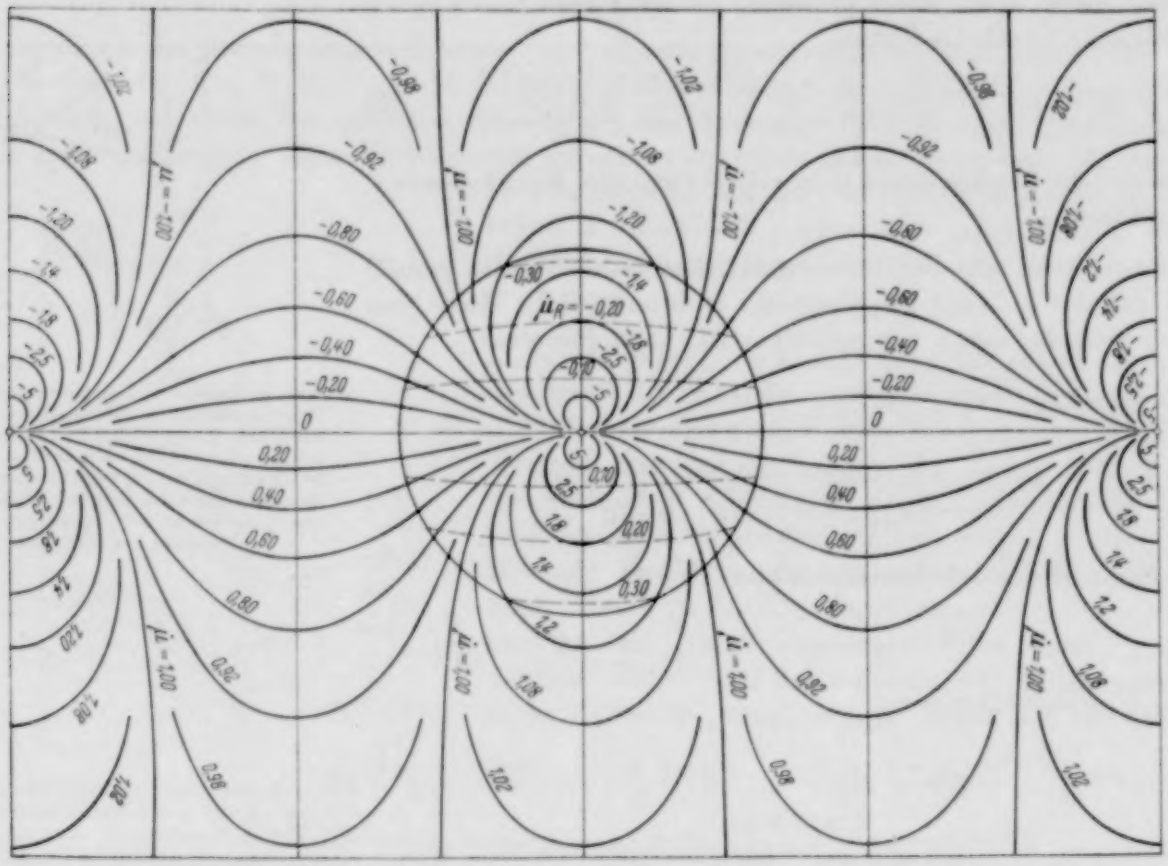

Abb. 3. Diagramme der Einflußfunktionen $\dot{\mu}$ und $\dot{\nu}$ einer Singularitätenreihe bzw. $\dot{\mu}_R$ und $\dot{\nu}_R$ der Singularitäten-Restreihe zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten eines Gitters. Hier beträgt der gegenseitige Abstand der Singularitäten (auf der Mittelwaagerechten durch Kreise markiert) $t = 60$ mm; für die praktische Rechnung empfiehlt sich die Verwendung der Originaldiagramme mit $t = 400$ mm und mit wesentlich größerer Kurvenzahl; für die Einzelsingularität (Einzelflügel) existiert ein entsprechendes Diagramm mit $l = 400$ mm.

Hierbei ist $l_j = l_S/2\,\varkappa$ eine Teillänge der Skelettlinienlänge l_S; ferner $\tau = \zeta/3\,l_j$ der dimensionslose Ortsparameter der ebenfalls dimensionsfreien Verteilungsfunktionen $\sigma_r(\tau)$ und $\varkappa$ die Anzahl der vorgegebenen Einzelverteilungen $\sigma_r(\tau)$. Diese Einzelverteilungen sollen sowohl als Quell-(Faktor Q_r^*) als auch als Wirbelverteilungen (Faktor Γ_r^*) verwendet werden. Außerdem sollen diese Faktoren gemäß (10) die dimensionslosen Intensitäten der Einzelverteilungen darstellen. Es soll also für die Intensität der gesamten Singularitätenverteilung $s(\zeta)$ gelten:

$$\int_0^{l_s} s(\zeta)\,d\zeta = \int_0^{l_s} [q(\zeta) + i\,\gamma(\zeta)]\,d\zeta = 2\,l\,U \sum_{r=1}^{\varkappa} (Q_r^* + i\,\Gamma_r^*)\,. \tag{14}$$

Damit ergibt sich zugleich für die dimensionslose Gesamtzirkulation der Gleichungen (6) und (7):

$$\Gamma^* = \sum_{r=1}^{\varkappa} \Gamma_r^*\,. \tag{15}$$

Durch Einsetzen von (13) in (14) erhält man für die Verteilungen $\sigma_r(\tau)$ die Bedingung

$$\frac{1}{3\,l_j} \int_0^{l_s} \sigma_r(\tau)\,d\zeta = \int_0^{2\varkappa/3} \sigma_r(\tau)\,d\tau = 1 \qquad \text{für alle } r\,. \tag{16}$$

Außerdem muß die vorgegebene Quellenverteilung $q(\zeta)$ die Schließungsbedingung

$$\int_0^{l_s} q(\zeta)\,d\zeta = 0 \tag{17}$$

erfüllen, die auf

$$\sum_{r=1}^{\varkappa} Q_r^* = 0 \tag{17a}$$

hinauskommt.

Ausgewählt werden für die Singularitätenverteilungen drei Grundverteilungen (Abb. 4), deren besonderes Kennzeichen darin besteht, daß sich jede von ihnen nur über ein kurzes Stück der Skelettlinie erstreckt. Die erste Verteilung $\sigma_1(\tau)$ erstreckt sich über ein Stück der Skelettlinie an der Profilnase und stellt dort im wesentlichen die erste *Birnbaum*-Verteilung (Cotangens-Glied des *Glauert*-schen Ansatzes) dar. Die zweite Verteilung $\sigma_2(\tau)$ beginnt ebenfalls an der Profilnase (Anfangspunkt der Skelettlinie) und stellt mit ihrem ersten Stück die zweite *Birnbaum*-Verteilung dar. Ihr Spiegelbild wird als Verteilung $\sigma_\varkappa(\tau)$ am Ende der Skelettlinie (Hinterkante) verwendet, so daß im letzten Stück der Skelettlinie ebenfalls die zweite *Birnbaum*-Verteilung dargestellt werden kann. Die dritte Grundverteilung $\sigma_r(\tau)$ läßt Nase und Hinterkante unbeeinflußt und kann beliebig oft (an verschiedenen Stellen der Skelettlinie) verwendet werden.

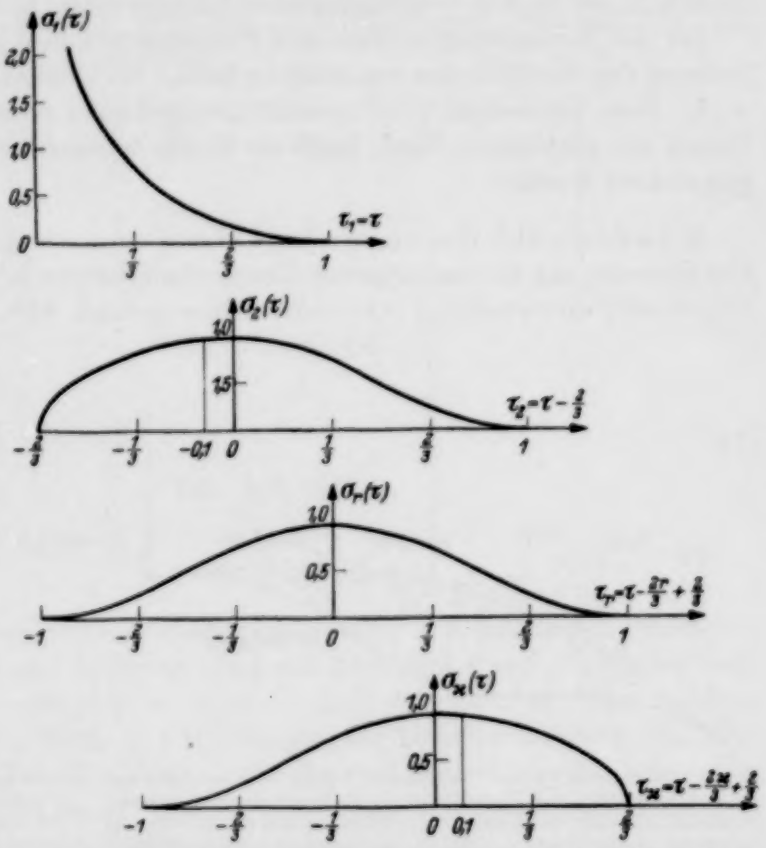

Abb. 4. Vorgegebene Singularitäten- (Wirbel- und Quell-)Verteilungen. τ Koordinate längs der Skelettlinie (siehe Abb. 8); $\sigma(\tau)$ Verteilungsfunktionen, von denen jede nur längs eines Stückes der Skelettlinie definiert ist: $\sigma_1(\tau)$ und $\sigma_2(\tau)$ an der Profilnase; $\sigma_\varkappa(\tau)$ än der Hinterkante; $\sigma_r(\tau)$ kann dazwischen beliebig oft vorgegeben werden.

Die Wahl dieser drei Grundverteilungen hat zwei Vorteile: erstens genügen die in den Tabellen angegebenen Hilfswerte, um die Rechnung mit beliebig großer Anzahl von vorgegebenen Verteilungen durchführen zu können; zweitens werden mit zunehmender Anzahl der vorgegebenen Einzelverteilungen deren Intensitäten Q_r^* und Γ_r^* kleiner, so daß die Genauigkeit bei der Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten wächst, ohne daß die Einflußfunktionen genauer bestimmt werden müssen. Es wird dafür in Kauf genommen, daß die formale Darstellung dieser Grundverteilungen etwas umständlich ist.

Auf die praktische Rechnung hat das ohnehin keinen Einfluß, da die Gleichungen für die Grundverteilungen dabei nicht benötigt werden. Diese lauten

$$\sigma_1(\tau) = 0{,}735 \operatorname{ctg}\left[0{,}5 \arccos\left(1 - 1{,}449\,\tau\right)\right] - 0{,}605\,\sigma_2(\tau) \quad \text{für } 0 \leqq \tau \leqq 1\,, \tag{18}$$

$$\sigma_2(\tau) = 1{,}138\sqrt{0{,}799 + 0{,}533\,\tau_2 - \tau_2^2} \quad \text{für } -2/3 \leqq \tau_2 = \tau - 2/3 \leqq -0{,}1$$

$$= 0{,}5\,(1 + \cos \pi\,\tau_2) \quad \text{für } -0{,}1 \leqq \tau_2 = \tau - 2/3 \leqq +1\,, \tag{19}$$

$$\sigma_r(\tau) = 0{,}5\,(1 + \cos \pi\,\tau_r) \quad \text{verwendet für } 3 \leqq r \leqq \varkappa - 1$$

$$\text{im Bereich } -1 \leqq \tau_r = \tau - \frac{2\,r}{3} + \frac{2}{3} \leqq +1\,, \tag{20}$$

$$\sigma_\varkappa(\tau) = 0{,}5\,(1 + \cos \pi\,\tau_\varkappa) \quad \text{für } -1 \leqq \tau_\varkappa = \tau - \frac{2\,\varkappa}{3} + \frac{2}{3} \leqq +0{,}1$$

$$= 1{,}138\sqrt{0{,}799 + 0{,}533\,\tau_\varkappa - \tau_\varkappa^2} \quad \text{für } +0{,}1 \leqq \tau_\varkappa = \tau - \frac{2\,\varkappa}{3} + \frac{2}{3} \leqq +\frac{2}{3}\,. \tag{21}$$

Diese vier Verteilungen sind in Abb. 4 dargestellt.

Sowohl bei Profilen mit sehr dicker Nase, als auch bei Profilen mit dicker Hinterkante hat es sich für die Berechnung als zweckmäßig erwiesen, neben diesen Singularitätenverteilungen noch gewisse Zusatzsingularitäten zu verwenden.

Sofern der Krümmungsradius der Profilnase größer als 0,4 l_j ist (Abb. 12), wird ein Dipol als Zusatzsingularität zur Darstellung der Profilnase verwendet. Dargestellt wird er durch zwei gleich starke entgegengesetzt wirkende Einzelsingularitäten. Die eine davon wird in den Anfangspunkt der Skelettlinie gelegt, die andere wird so angeordnet, daß der Mittelpunkt der Nasenabrundung in der Mitte zwischen diesen beiden Einzelsingularitäten liegt. Die Intensität dieses Dipoles wird durch die dimensionslose Größe D angegeben. Dabei ist $D_\Gamma = \Gamma/2\,l\,U$ die Zirkulation des Wirbels im Anfangspunkt der Skelettlinie zur Kennzeichnung des Wirbelpaares, $D_Q = Q/2\,l\,U =$ Stärke der Quelle im Anfangspunkt der Skelettlinie zur Kennzeichnung des Quell-Senken-Paares. Da diese beiden Größen weder die Gesamtzirkulation noch die Gesamtquellstärke des Profiles verändern, brauchen sie in den vorangehenden Gleichungen nicht berücksichtigt werden.

Ist der Krümmungsradius der Profilhinterkante größer als 0,08 l_j (Abb. 11), so wird zur Darstellung des Profiles eine zusätzliche Senke verwendet, die im Endpunkt der Skelettlinie angeordnet wird. Ihre Intensität wird gemäß (10) gekennzeichnet durch die dimensionslose Größe $-Q^*_{\varkappa+1}$. Sofern sie verwendet wird, muß sie in die Summen der Gleichungen (13), (14) und (17a) mit aufgenommen werden.

d) Induzierte Geschwindigkeiten der vorgegebenen Singularitätenverteilungen. Zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten $u^*_{ir} = u_{ir}/U$ und $v^*_{ir} = v_{ir}/U$ einer vorgegebenen Singularitätenverteilung $\sigma_r(\tau)$ wird diese gemäß Abb. 5 in zehn gleich starke Einzelsingularitäten

Abb. 5. Induzierte Geschwindigkeiten einer Wirbelverteilung. τ Koordinate längs der Skelettlinie; l_j Teillänge der Skelettlinie; τ_λ Koordinaten der 10 gleichstarken Wirbel, durch die die Wirbelverteilung ersetzt wird; u_{ir} und v_{ir} Komponenten der im Punkt z induzierten Geschwindigkeit in x- bzw. y-Richtung; h Abstand des Punktes z von der Skelettlinie; ψ Winkel der Skelettlinientangente gegen die x-Achse am Fußpunkt des Lotes von Punkt z.

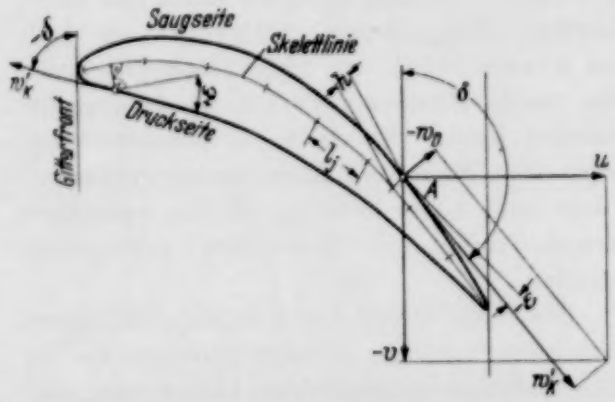

Abb. 6. Komponenten der resultierenden Geschwindigkeit im Konturpunkt A: u senkrecht zur Gitterfront und v in Richtung der Gitterfront; w'_K in Richtung der Kontur; w_D senkrecht zur Kontur; δ Winkel zwischen Gitterfront und Konturtangente im Punkt A; h Abstand des Punktes A von der Skelettlinie; ε Winkel zwischen Kontur- und Skelettlinientangente in den Schnittpunkten des Lotes von A auf die Skelettlinie.

zerlegt, die im Schwerpunkt des jeweiligen Flächenstückes der Verteilung angeordnet sind. Die Abszissen τ der Einzelsingularitäten (bezeichnet mit τ_λ) sind in Tabelle 1 für die einzelnen Verteilungen angegeben. Sofern der Abstand h des Punktes z (Abb. 5) größer ist als 0,4 l_j ergibt sich

$u_{i_r}^*$ als Summe der für die zehn Einzelsingularitäten gebildeten u_i^*-Werte von Gl. (12). Entsprechendes gilt für $v_{i_r}^*$. Dies sowie die Aufstellung der m- und n-Werte (Tabelle 2 bis 5) für Punkte z, deren Abstand h kleiner ist als $0{,}4\,l_j$, ist im Anhang II abgeleitet.

Zur Bestimmung der Druckverteilung an der Schaufelkontur benötigt man die Geschwindigkeiten w'_K in Richtung der Kontur und zur Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung nach Abschnitt 2 e) die Geschwindigkeiten w_D senkrecht zur Kontur, vgl. Abb. 6. Es sollen deshalb die Geschwindigkeiten $u_{i_r}^*$ und $v_{i_r}^*$ in die Komponenten $w'^*_K = w'_K/U$ parallel zur Kontur und $w_D^* = w_D/U$ normal zur Kontur umgerechnet werden. Dabei werden sogleich die Komponenten U und $V_\infty = -U \operatorname{ctg}\beta_\infty$ der überlagerten Translationsströmung mit erfaßt:

$$u^* = u/U = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} u_{i_r}^* \qquad \text{und} \qquad v^* = v/U = -\operatorname{ctg}\beta_\infty + \sum_{r=1}^{\infty} v_{i_r}^* \,. \tag{22}$$

Mit dem Konturwinkel δ nach Abb. 6 ergibt sich für jeden Punkt der Kontur

$$w'^*_K = u^* \sin\delta + v^* \cos\delta\,, \qquad w_D^* = u^* \cos\delta - v^* \sin\delta\,. \tag{23}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (7), (22) und (49) ergibt sich hieraus für das Gitter (der Einzelflügel wird von hier ab getrennt in Abschn. 4 behandelt):

$$\left.\begin{aligned} w'^*_K &= \sin\delta - \operatorname{ctg}\beta_1 \cos\delta + \Big(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r^* M_r - \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_r^* N_r\Big)\, l/t\,, \\ w_D^* &= \cos\delta + \operatorname{ctg}\beta_1 \sin\delta + \Big(\sum_{r=1}^{\infty} Q_r^* N_r + \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma_r^* M_r\Big)\, l/t \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

mit

$$M_r = (1+\mu_r)\sin\delta + \nu_r \cos\delta\,, \qquad N_r = (1+\mu_r)\cos\delta - \nu_r \sin\delta\,. \tag{25}$$

Hierbei wurde von der Schließungsbedingung Gl. (17a) Gebrauch gemacht. Es können daher mit (24) und (25) nur geschlossene Profile berechnet werden.

Für die praktische Berechnung ist es zweckmäßig, (25) mit den Gleichungen (56) und (57) des Anhanges zusammenzufassen. Mit ε nach Abb. 6 ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \Big[1 + \frac{1}{10}\sum_{\lambda=1}^{10_R} \dot\mu\,(z - z[\tau_\lambda])\Big]\sin\delta + \frac{1}{10}\sum_{\lambda=1}^{10_R} \dot\nu\,(z - z[\tau_\lambda])\cos\delta \pm \Delta M\,, \\ N_r &= \Big[1 + \frac{1}{10}\sum_{\lambda=1}^{10_R} \dot\mu\,(z - z[\tau_\lambda])\Big]\cos\delta - \frac{1}{10}\sum_{\lambda=1}^{10_R} \dot\nu\,(z - z[\tau_\lambda])\sin\delta + \Delta N \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \Delta M = \Delta N &= 0 && \text{für } h/l_j > 0{,}4\,, \\ \Delta M &= \frac{t}{3\,l_j}(m_r\cos\varepsilon + n_r\sin\varepsilon) \\ \text{bzw.} \qquad \text{und} \qquad \Delta N &= \frac{t}{3\,l_j}(m_r\sin\varepsilon - n_r\cos\varepsilon) && \text{für } h/l_j \leqq 0{,}4\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

In (26) ist für die Saugseite $+\Delta M$, für die Druckseite $-\Delta M$ einzusetzen. Das Zeichen $\sum^R$ bedeutet: Bei Punkten mit $h/l_j \leqq 0{,}4$ sind die Werte $\dot\mu$ und $\dot\nu$, deren $z[\tau_\lambda]$ auf dem von z auf die Skelettlinie gefällten Lot liegt, durch die Werte $\dot\mu_R\,(z - z[\tau_\lambda])$ bzw. $\dot\nu_R\,(z - z[\tau_\lambda])$ zu ersetzen. Man beachte außerdem die unterschiedliche Festlegung des Winkels ε für Saug- und Druckseite (Abb. 6). Dadurch genügt es, die m- und n-Werte in den Tabellen 2 bis 5 nur für eine Seite zu tabellieren. Die Koordinaten von z sind dabei durch τ_r nach (18) bis (21) und h/l_j nach Abb. 6 bestimmt. Tabelle 5 enthält zusätzliche m- und n-Werte für Punkte der Profilnase nach Abb. 7.

Zu bestimmen sind nun noch die induzierten Geschwindigkeiten der Zusatzsingularitäten, die bei dicker Profilnase bzw. dicker Hinterkante gemäß Abschnitt 2c) verwendet werden. Für den Dipol gilt nach (12b)

$$\left.\begin{aligned} u_i^* &= \Big\{D_Q\big[\dot\mu\,(z - z[+D]) - \dot\mu\,(z - z[-D])\big] + D_\Gamma\big[\dot\nu\,(z - z[+D]) - \dot\nu\,(z - z[-D])\big]\Big\}\, l/t\,, \\ v_i^* &= \Big\{D_Q\big[\dot\nu\,(z - z[+D]) - \dot\nu\,(z - z[-D])\big] - D_\Gamma\big[\dot\mu\,(z - z[+D]) - \dot\mu\,(z - z[-D])\big]\Big\}\, l/t\,. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dabei kennzeichnet $z[+D]$ den Anfangspunkt der Skelettlinie (Lage der einen Singularität des Dipoles) und $z[-D]$ die Lage der anderen Singularität des Dipoles. Setzt man analog zu (25)

$$\left.\begin{aligned} M_D &= \left[\dot{\mu}\,(z - z[+D]) - \dot{\mu}\,(z - z[-D])\right]\sin\delta + \left[\dot{\nu}\,(z - z[+D]) - \dot{\nu}\,(z - z[-D])\right]\cos\delta\,, \\ N_D &= \left[\dot{\mu}\,(z - z[+D]) - \dot{\mu}\,(z - z[-D])\right]\cos\delta - \left[\dot{\nu}\,(z - z[+D]) - \dot{\nu}\,(z - z[-D])\right]\sin\delta\,, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

so können die induzierten Geschwindigkeiten des Dipoles in (24) mit erfaßt werden. Dabei wird die Gleichung für $w'^{\bullet}_K$ um den Summanden

$$\Delta w'^{\bullet}_K = (D_Q\, M_D - D_\Gamma\, N_D)\, l/t \tag{30}$$

und die Gleichung $w^{\bullet}_D$ um den Summanden

$$\Delta w^{\bullet}_D = (D_Q\, N_D + D_\Gamma\, M_D)\, l/t$$

erweitert.

Tabelle 1. *Lage und Stärke der Einzelsingularitäten auf der Skelettlinie, vgl. Abb. 4 und 5*

$3\,\tau_\lambda$	Anzahl der zugehörigen Werte $\dot{\mu}\,(z - z[\tau_\lambda])$ die für die einzelnen Verteilungen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ in Gl. (53) einzusetzen sind						
	σ_1	σ_2	σ_3	$\sigma_4 \ldots \sigma_{\varkappa-2}$	$\sigma_{\varkappa-1}$	$\sigma_\varkappa$	
0,05	5	0					
0,40	2	1					
0,85	2	1					
1,20	0	1	0				
1,55	1	1	0				
1,85	0	1	0				
2,15	0	1	1				
2,45	0	1	0				
2,80	0	1	1				
3,20		1	1	0			
3,55		0	1	0			
3,85		1	1	0			
4,15		0	1	1			
4,45		0	1	0			
4,80		0	1	1			
5,20			1	1	0		
5,55			0	1	0		
5,85			1	1	0		
....			0	...	...	0	
$(2\,\varkappa - 6) + 0{,}15$				0	1	1	
$(2\,\varkappa - 6) + 0{,}45$				0	1	0	
$(2\,\varkappa - 6) + 0{,}80$				0	1	1	
$(2\,\varkappa - 5) + 0{,}20$					1	1	0
$(2\,\varkappa - 5) + 0{,}55$					0	1	0
$(2\,\varkappa - 5) + 0{,}85$					1	1	0
$(2\,\varkappa - 4) + 0{,}15$					0	1	1
$(2\,\varkappa - 4) + 0{,}45$					0	1	0
$(2\,\varkappa - 4) + 0{,}80$					0	1	1
$(2\,\varkappa - 3) + 0{,}20$						1	1
$(2\,\varkappa - 3) + 0{,}55$						0	1
$(2\,\varkappa - 3) + 0{,}85$						1	1
$(2\,\varkappa - 2) + 0{,}15$						0	1
$(2\,\varkappa - 2) + 0{,}45$						0	1
$(2\,\varkappa - 2) + 0{,}80$						0	1
$(2\,\varkappa - 1) + 0{,}15$							1
$(2\,\varkappa - 1) + 0{,}60$							1

Tabelle 2. *m_1- und n_1-Werte zur Verteilung $\sigma_1(\tau)$ nach Gl. (18)*
(Hilfswerte zur Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten für Konturpunkte mit $h/l_j < 0{,}4$; s. Abb. 5 und 6)

m_1-Werte

$3\tau =$	0,05	0,40	0,85	1,20	1,55	1,85	2,15	2,45	2,80
$h/l_j = 0$	2,12	0,338	0,192	0,055	0,121	—0,126	0,029	0,046	0,030
0,02	0,90	0,266	0,165	0,037	0,107	—0,135	0,023	0,043	0,029
0,04	—0,10	0,204	0,141	0,023	0,095	—0,140	0,018	0,041	0,028
0,06	—0,32	0,154	0,118	0,012	0,084	—0,142	0,014	0,039	0,026
0,08	—0,43	0,113	0,098	0,004	0,074	—0,141	0,010	0,037	0,025
0,10	—0,47	0,079	0,080	—0,002	0,065	—0,139	0,007	0,035	0,024
0,12	—0,50	0,055	0,065	—0,007	0,057	—0,135	0,004	0,033	0,023
0,14	—0,51	0,037	0,053	—0,011	0,050	—0,130	0,002	0,031	0,022
0,16	—0,50	0,022	0,043	—0,014	0,043	—0,124	0,000	0,029	0,021
0,18	—0,48	0,009	0,034	—0,017	0,037	—0,117	—0,002	0,027	0,020
0,20	—0,44	—0,003	0,027	—0,018	0,032	—0,109	—0,004	0,025	0,020
0,22	—0,40	—0,012	0,021	—0,020	0,027	—0,101	—0,006	0,024	0,019
0,24	—0,37	—0,020	0,016	—0,021	0,022	—0,094	—0,008	0,022	0,018
0,26	—0,33	—0,027	0,012	—0,022	0,018	—0,087	—0,009	0,020	0,017
0,28	—0,29	—0,033	0,008	—0,022	0,014	—0,080	—0,010	0,019	0,016
0,30	—0,25	—0,037	0,005	—0,022	0,010	—0,073	—0,011	0,018	0,016
0,32	—0,22	—0,040	0,002	—0,022	0,007	—0,067	—0,012	0,016	0,015
0,34	—0,19	—0,042	0,000	—0,022	0,004	—0,062	—0,012	0,015	0,015
0,36	—0,17	—0,044	—0,001	—0,021	0,002	—0,057	—0,013	0,013	0,014
0,38	—0,15	—0,045	—0,003	—0,021	0,000	—0,052	—0,013	0,012	0,014
0,40	—0,13	—0,046	—0,004	—0,020	—0,001	—0,048	—0,013	0,011	0,013

n_1-Werte

$3\tau =$	0,05	0,40	0,85	1,20	1,55	1,85	2,15	2,45	2,80
$h/l_j = 0$	6,54	1,918	0,984	0,625	0,376	0,216	0,106	0,039	0,004
0,02	5,97	1,782	0,948	0,559	0,367	0,186	0,101	0,039	0,005
0,04	5,37	1,666	0,912	0,502	0,357	0,160	0,097	0,039	0,006
0,06	4,77	1,562	0,876	0,448	0,348	0,137	0,092	0,039	0,008
0,08	4,17	1,463	0,843	0,401	0,339	0,119	0,088	0,038	0,009
0,10	3,67	1,375	0,813	0,359	0,330	0,103	0,083	0,038	0,010
0,12	3,21	1,287	0,782	0,320	0,321	0,089	0,078	0,038	0,010
0,14	2,85	1,208	0,752	0,283	0,313	0,077	0,074	0,037	0,011
0,16	2,57	1,132	0,723	0,250	0,304	0,065	0,070	0,037	0,012
0,18	2,34	1,062	0,695	0,219	0,296	0,055	0,066	0,037	0,013
0,20	2,15	0,993	0,667	0,190	0,287	0,046	0,062	0,036	0,014
0,22	1,98	0,931	0,642	0,164	0,279	0,037	0,058	0,036	0,014
0,24	1,83	0,872	0,616	0,141	0,271	0,030	0,054	0,035	0,015
0,26	1,69	0,818	0,591	0,121	0,263	0,024	0,051	0,035	0,016
0,28	1,58	0,769	0,567	0,103	0,255	0,018	0,047	0,034	0,016
0,30	1,48	0,725	0,545	0,087	0,248	0,014	0,044	0,034	0,016
0,32	1,38	0,683	0,522	0,074	0,240	0,011	0,042	0,033	0,016
0,34	1,30	0,646	0,501	0,063	0,233	0,009	0,040	0,032	0,017
0,36	1,23	0,611	0,482	0,053	0,225	0,007	0,038	0,032	0,017
0,38	1,17	0,580	0,464	0,045	0,218	0,006	0,036	0,031	0,017
0,40	1,11	0,549	0,447	0,040	0,211	0,005	0,034	0,030	0,018

Tabelle 3. *m_2- und n_2-Werte zur Verteilung $\sigma_2(\tau)$ nach Gl. (19)* für $\tau_2 < 0$ *und zur Verteilung $\sigma_\varkappa(\tau)$ nach Gl. (21) für $\tau_\varkappa > 0$*

Werte für $m_2(\tau_2) = -m_\varkappa(-\tau_\varkappa)$

$3\tau_2 =$	—1,95	—1,60	—1,15	—0,80	—0,45	—0,15
$h/l_j = 0$	—0,141	—0,081	—0,021	—0,065	0,024	—0,010
0,02	—0,105	—0,069	—0,015	—0,059	0,027	—0,008
0,04	—0,080	—0,059	—0,010	—0,054	0,029	—0,007
0,06	—0,062	—0,050	—0,006	—0,049	0,030	—0,005
0,08	—0,047	—0,042	—0,003	—0,044	0,030	—0,004
0,10	—0,034	—0,035	0,000	—0,040	0,029	—0,003
0,12	—0,022	—0,029	0,002	—0,036	0,028	—0,002
0,14	—0,012	—0,023	0,004	—0,032	0,026	—0,001
0,16	—0,004	—0,018	0,005	—0,028	0,024	0,000
0,18	0,002	—0,013	0,006	—0,024	0,022	0,000
0,20	0,008	—0,009	0,006	—0,021	0,019	0,001
0,22	0,012	—0,005	0,007	—0,017	0,016	0,001
0,24	0,016	—0,002	0,007	—0,015	0,014	0,002
0,26	0,018	0,001	0,007	—0,013	0,012	0,002
0,28	0,020	0,004	0,006	—0,011	0,010	0,002
0,30	0,022	0,006	0,006	—0,009	0,009	0,002
0,32	0,023	0,008	0,005	—0,008	0,008	0,002
0,34	0,024	0,009	0,005	—0,006	0,007	0,002
0,36	0,024	0,010	0,004	—0,005	0,006	0,001
0,38	0,023	0,011	0,003	—0,005	0,006	0,001
0,40	0,022	0,011	0,003	—0,004	0,006	0,001

Werte für $n_2(\tau_2) = n_\varkappa(-\tau_\varkappa)$

$3\tau_2 =$	—1,95	—1,60	—1,15	—0,80	—0,45	—0,15
$h/l_j = 0$	0,199	0,547	0,761	0,870	0,949	0,994
0,02	0,181	0,528	0,723	0,823	0,888	0,925
0,04	0,163	0,509	0,684	0,776	0,832	0,859
0,06	0,145	0,489	0,648	0,730	0,777	0,797
0,08	0,129	0,467	0,612	0,686	0,724	0,737
0,10	0,114	0,446	0,576	0,642	0,672	0,680
0,12	0,099	0,425	0,540	0,598	0,621	0,625
0,14	0,085	0,404	0,506	0,554	0,570	0,571
0,16	0,073	0,383	0,474	0,513	0,522	0,522
0,18	0,062	0,363	0,443	0,475	0,477	0,476
0,20	0,052	0,344	0,412	0,437	0,437	0,433
0,22	0,045	0,325	0,383	0,402	0,402	0,394
0,24	0,039	0,307	0,356	0,373	0,373	0,363
0,26	0,033	0,290	0,332	0,348	0,347	0,336
0,28	0,028	0,274	0,312	0,326	0,325	0,312
0,30	0,024	0,260	0,295	0,307	0,305	0,294
0,32	0,021	0,248	0,278	0,290	0,288	0,277
0,34	0,017	0,237	0,265	0,275	0,273	0,262
0,36	0,015	0,228	0,253	0,262	0,260	0,249
0,38	0,013	0,219	0,241	0,250	0,248	0,237
0,40	0,011	0,211	0,231	0,239	0,237	0,226

Tabelle 4. *m_r- und n_r-Werte zur Verteilung $\sigma_r(\tau)$ nach Gl. (20) sowie zur Verteilung $\sigma_2(\tau)$ nach Gl. (19) für $\tau_2 > 0$ und zur Verteilung $\sigma_\varkappa(\tau)$ nach Gl. (21) für $\tau_\varkappa < 0$*

Werte für $m_r(\tau_r) = -m_r(-\tau_r) = m_2(\tau_2) = -m_\varkappa(-\tau_\varkappa)$

$3\,\tau_r =$	0,15	0,45	0,80	1,20	1,55	1,85	2,15	2,45	2,80
$h/l_j = 0$	0,011	—0,017	0,037	0,036	0,211	0,113	—0,137	0,017	0,025
0,02	0,009	—0,024	0,028	0,027	0,199	0,102	—0,142	0,011	0,023
0,04	0,007	—0,027	0,021	0,021	0,186	0,092	—0,145	0,005	0,020
0,06	0,005	—0,030	0,015	0,016	0,174	0,082	—0,146	0,000	0,018
0,08	0,003	—0,031	0,010	0,012	0,162	0,073	—0,145	—0,004	0,016
0,10	0,002	—0,032	0,006	0,008	0,150	0,065	—0,141	—0,008	0,014
0,12	0,000	—0,032	0,003	0,005	0,139	0,058	—0,135	—0,012	0,012
0,14	—0,001	—0,031	0,000	0,003	0,127	0,051	—0,128	—0,015	0,010
0,16	—0,002	—0,030	—0,002	0,001	0,116	0,046	—0,121	—0,018	0,008
0,18	—0,003	—0,028	—0,003	0,000	0,106	0,041	—0,113	—0,020	0,006
0,20	—0,004	—0,026	—0,004	—0,001	0,096	0,036	—0,105	—0,022	0,005
0,22	—0,005	—0,024	—0,005	—0,002	0,087	0,032	—0,098	—0,023	0,003
0,24	—0,005	—0,022	—0,005	—0,003	0,079	0,028	—0,090	—0,024	0,002
0,26	—0,006	—0,020	—0,005	—0,003	0,071	0,025	—0,083	—0,025	0,001
0,28	—0,006	—0,018	—0,005	—0,003	0,064	0,022	—0,077	—0,026	0,000
0,30	—0,006	—0,017	—0,004	—0,003	0,058	0,019	—0,071	—0,026	—0,001
0,32	—0,006	—0,015	—0,004	—0,003	0,052	0,017	—0 065	—0,026	—0,002
0,34	—0,006	—0,014	—0,004	—0,003	0,047	0,015	—0,059	—0,026	—0,002
0,36	—0,006	—0,012	—0,003	—0,003	0,043	0,013	—0,053	—0,025	—0,003
0,38	—0,006	—0,011	—0,003	—0,003	0,038	0,012	—0,048	—0,024	—0,003
0,40	—0,006	—0,010	—0,002	—0,002	0,034	0,010	—0,043	—0,023	—0,003

Werte für $n_r(\tau_r) = n_r(-\tau_r) = n_2(\tau_2) = n_\varkappa(-\tau_\varkappa)$

$3\,\tau_r =$	0,15	0,45	0,80	1,20	1,55	1,85	2,15	2,45	2,80
$h/l_j = 0$	0,994	0,946	0,835	0,655	0,474	0,321	0,185	0,081	0,011
0,02	0,916	0,878	0,778	0,622	0,417	0,313	0,160	0,076	0,012
0,04	0,838	0,810	0,726	0,590	0,364	0,304	0,133	0,072	0,013
0,06	0,767	0,746	0,675	0,558	0,318	0,296	0,108	0,068	0,013
0,08	0,701	0,688	0,628	0,528	0,277	0,287	0,087	0,064	0,014
0,10	0,640	0,636	0,587	0,499	0,242	0,279	0,070	0,060	0,015
0,12	0,590	0,586	0,547	0,473	0,208	0,271	0,054	0,056	0,015
0,14	0,542	0,540	0,512	0,449	0,179	0,263	0,040	0,052	0,016
0,16	0,499	0,497	0,477	0,426	0,154	0,255	0,028	0,049	0,016
0,18	0,459	0,457	0,446	0,406	0,132	0,247	0,018	0,045	0,017
0,20	0,425	0,423	0,418	0,386	0,112	0,239	0,009	0,042	0,017
0,22	0,396	0,394	0,392	0,367	0,095	0,232	0,002	0,038	0,017
0,24	0,370	0,368	0,368	0,349	0,082	0,225	—0,004	0,035	0,017
0,26	0,347	0,346	0,346	0,333	0,069	0,218	—0,008	0,032	0,017
0,28	0,326	0,325	0,325	0,317	0,059	0,212	—0,012	0,030	0,016
0,30	0,307	0,306	0,306	0,302	0,050	0,205	—0,014	0,027	0,016
0,32	0,290	0,290	0,290	0,288	0,041	0,199	—0,016	0,025	0,016
0,34	0,275	0,275	0,275	0,275	0,034	0,193	—0,018	0,022	0,016
0,36	0,261	0,261	0,262	0,262	0,028	0,188	—0,018	0,020	0,015
0,38	0,247	0,247	0,249	0,250	0,023	0,183	—0,019	0,018	0,015
0,40	0,236	0,236	0,238	0,239	0,019	0,178	—0,019	0,017	0,014

Tabelle 5. *m_r- und n_r-Werte zur Verteilung $\sigma_1(\tau)$ nach Gl. (18) für die Profilnase und zur Verteilung $\sigma_2(\tau)$ nach Gl. (19) für die Profilnase (s. Abb. 7)*

Punkt (Abb. 7)	m_1-Werte		n_1-Werte		m_2-Werte		n_2-Werte	
	0°	45°	0°	45°	0°	45°	0°	45°
$h/l_f = 0$	—	2,12	—	6,54	—	—0,141	—	0,199
0,02	—	—0,26	—	5,87	—	—0,120	—	0,147
0,04	—	—2,35	—	5,18	—	—0,101	—	0,100
0,06	—14,4	—3,18	0	4,54	—0,182	—0,087	0	0,073
0,08	—6,96	—2,94	0	3,93	—0,136	—0,075	0	0,058
0,10	—5,05	—2,67	0	3,34	—0,109	—0,064	0	0,047
0,12	—4,05	—2,39	0	2,88	—0,087	—0,055	0	0,041
0,14	—3,40	—2,13	0	2,48	—0,070	—0,047	0	0,037
0,16	—2,90	—1,90	0	2,17	—0,057	—0,040	0	0,033
0,18	—2,52	—1,71	0	1,92	—0,046	—0,034	0	0,031
0,20	—2,23	—1,54	0	1,70	—0,038	—0,028	0	0,029
0,22	—1,98	—1,42	0	1,52	—0,032	—0,023	0	0,026
0,24	—1,80	—1,33	0	1,36	—0,026	—0,018	0	0,024
0,26	—1,65	—1,24	0	1,23	—0,022	—0,014	0	0,022
0,28	—1,52	—1,16	0	1,12	—0,018	—0,011	0	0,020
0,30	—1,41	—1,08	0	1,02	—0,014	—0,009	0	0,019
0,32	—1,32	—1,01	0	0,95	—0,012	—0,007	0	0,017
0,34	—1,24	—0,94	0	0,88	—0,010	—0,005	0	0,015
0,36	—1,18	—0,88	0	0,83	—0,008	—0,004	0	0,014
0,38	—1,13	—0,84	0	0,78	—0,007	—0,003	0	0,013
0,40	—1,09	—0,80	0	0,74	—0,006	—0,002	0	0,011

Analog hierzu wird für die zusätzliche Einzelsenke an der Hinterkante (im Endpunkt der Skelettlinie $z[E]$) gebildet

$$\left.\begin{aligned} M_{\varkappa+1} &= \left[1 + \dot{\mu}\,(z - z[E])\right] \sin\delta + \dot{\nu}\,(z - z[E]) \cos\delta\,, \\ N_{\varkappa+1} &= \left[1 + \dot{\mu}\,(z - z[E])\right] \cos\delta - \dot{\nu}\,(z - z[E]) \sin\delta\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Dann brauchen in (24) die Summen $\sum_{r=1}^{\varkappa} Q_r^* M_r$ und $\sum_{r=1}^{\varkappa} Q_r^* N_r$ nur auf $\sum_{r=1}^{\varkappa+1} Q_r^* M_r$ bzw. $\sum_{r=1}^{\varkappa+1} Q_r^* N_r$ erweitert zu werden, um die induzierten Geschwindigkeiten der Einzelsenke $-Q_{\varkappa+1}^*$ mit zu erfassen.

Damit können für sämtliche vorgegebenen Einzelsingularitäten und Singularitätenverteilungen die induzierten Geschwindigkeiten $w_K'^*$ und w_D^* nach (24) für das Gitter bestimmt werden, wobei zugleich die überlagerte Translationsströmung erfaßt wird. Die entsprechenden Gleichungen für die Berechnung des Einzelflügels werden im Abschnitt 4 angegeben.

e) Gleichungssystem zur Bestimmung der Q_r^*- und Γ_r^*-Werte. Bei der exakten Lösung müßte für sämtliche Konturpunkte die kinematische Strömungsbedingung

$$w_D^* = 0 \tag{32}$$

erfüllt sein, welche zum Ausdruck bringt, daß längs der ganzen Kontur die Geschwindigkeitskomponente normal zur Kontur verschwindet. Da jedoch nur eine beschränkte Anzahl von Singularitätenverteilungen ($\varkappa \geqq 3$) vorgegeben wird, kann diese Bedingung beim unendlich dünnen Profil ($Q_r^* \equiv 0$) nur für $\varkappa$-Punkte, beim dicken Profil ($Q_r^* \neq 0$) für 2 $\varkappa$-Punkte erfüllt werden. Bei Verwendung des zusätzlichen Dipoles erhöht sich die Zahl dieser Punkte um 2, bei Verwendung der zusätzlichen Einzelsenke $-Q_{\varkappa+1}^*$ um einen weiteren Punkt.

Es zeigte sich nun, daß es nicht möglich ist, ein allgemein gültiges Gesetz für die Verteilung dieser Punkte anzugeben, wenn zugleich verlangt wird, daß die Ergebnisse der Berechnung bei beliebigen Profilformen befriedigen sollen. Dies liegt daran, daß die kinematische Strömungs-

bedingung $w_D^* = 0$ keine Einschränkungen bezüglich des Abstandes von Kontur und berechneter Konturstromlinie enthält. So ist es möglich, daß dieser Abstand von der Profilnase bis zu Profilhinterkante beträchtlich zunimmt, obwohl die Strömungsrichtungen in den ausgewählten Konturpunkten übereinstimmen. Es wurde deshalb anstelle der einfachen kinematischen Strömungsbedingung (32) die verschärfte kinematische Strömungsbedingung

$$\int_{\xi_\vartheta}^{\xi'_\vartheta} \frac{w_D^*(\xi)\, d\xi}{\xi'_\vartheta - \xi_\vartheta} = 0 \tag{32a}$$

angesetzt. Hierbei ist ξ die Koordinate längs der Kontur; ξ_ϑ und ξ'_ϑ sind die Koordinaten der noch näher zu bestimmenden Konturpunkte (siehe Abb. 8). Diese Bedingung verlangt, daß die

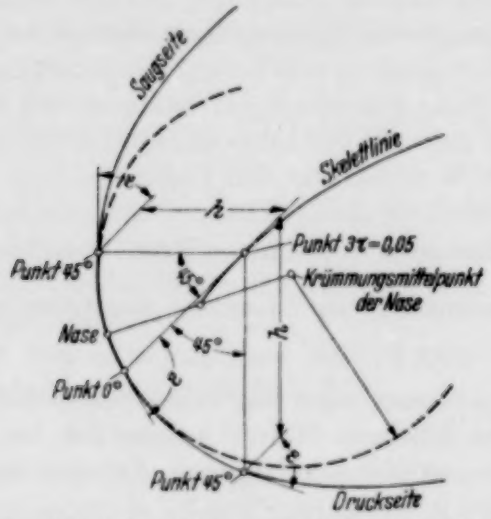

Abb. 7. Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten für Konturpunkte an der Profilnase. Punkt 0° wird bestimmt durch den Schnittpunkt der Skelettlinientangente im Punkt $3\tau = 0{,}05$ mit der Nase; Punkt 45° durch den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden zwischen Tangente und Normale im Punkt $3\tau = 0{,}05$ mit der Kontur; h Abstand zwischen Punkt $3\tau = 0{,}05$ und Konturpunkt; ε Winkel zwischen Skelettlinien- und Kontur-Tangente.

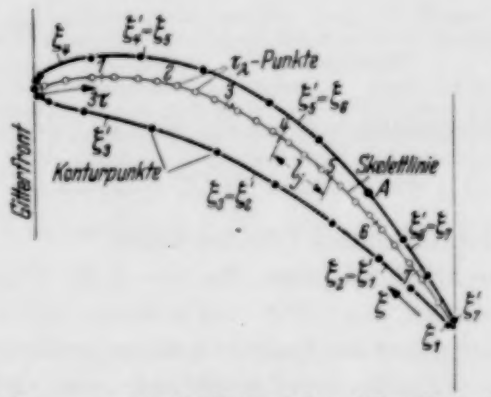

Abb. 8. Kontur- und Skelettlinienpunkte. ξ Koordinate längs der Kontur (ausgehend von der Hinterkante über Druckseite, Nase zur Saugseite); ξ_1, ξ'_1, ξ_3 usw. Konturpunkte zur Aufstellung des Gleichungssystems; übrige Konturpunkte (schwarze Punkte) zur Berechnung der Komponenten w_K und w_D der resultierenden Geschwindigkeit; τ_λ-Punkte auf der Skelettlinie bezeichnen die Lage der Einzelsingularitäten, durch die die vorgegebenen Verteilungen ersetzt werden.

berechnete Stromlinie, die durch den Konturpunkt ξ_ϑ hindurchläuft, auch durch den Konturpunkt ξ'_ϑ hindurchgeht. Zugleich muß damit an einer Stelle ξ_0 innerhalb des Intervalles $\xi_\vartheta < \xi_0 < \xi'_\vartheta$ die kinematische Strömungsbedingung $w_D^* = 0$ erfüllt werden. Die verschärfte kinematische Strömungsbedingung (32a) geht im Grenzfall $\xi_\vartheta \to \xi'_\vartheta$ in die einfache Bedingung (32) über.

Zur Bestimmung der Γ_τ^*-Werte bei der Berechnung des *unendlich dünnen* Profiles werden $\varkappa$-Gleichungen gemäß (32a) angesetzt. Dabei wird die Kontur von Profilnase bis -hinterkante in $\varkappa$-Intervalle unterteilt, von denen das erste und letzte halb so lang gewählt werden, wie die übrigen gleichlangen Intervalle.

Bei der Berechnung von *dicken* Profilen ohne Zusatzsingularitäten (Abb. 8) wird sowohl die Druckseite der Kontur (von Profilnase bis zum Beginn der Hinterkantenabrundung) als auch die Saugseite der Kontur (von dem Konturpunkt, der durch die Senkrechte zur Skelettlinie im Punkt $3\tau_\lambda = 0{,}4$ bestimmt wird, bis zum Beginn der Hinterkantenabrundung) in der oben angegebenen Weise in $\varkappa$-Intervalle unterteilt.

Bei Verwendung des Dipoles zur Berechnung von dicken Profilnasen (Abb. 12) werden zunächst zwei gleichlange Intervalle (Länge = 1,2 Krümmungsradius der Profilnase) an der Nase abgegrenzt. Das eine davon legt man symmetrisch zur Profilnase, das andere schließt auf der Saugseite an. Die restlichen Stücke von druck- und saugseitiger Kontur werden wieder in jeweils $\varkappa$-Intervalle unterteilt, wobei hier nur das letzte auf jeder Seite halb so lang gewählt wird, wie alle übrigen.

Bei Verwendung der Einzelsenke für ein Profil mit dicker Hinterkante (Abb. 11) enden die zu unterteilenden Stücke von druck- und saugseitiger Kontur nicht mehr am Beginn der Hinterkantenabrundung, sondern dort wo die Senkrechte zur Skelettlinie im Punkt $3\tau_\lambda = (2\varkappa - 1) + 0{,}15$ (siehe Tabelle 1) die Kontur schneidet. Im übrigen erfolgt die Unterteilung wie oben angegeben.

Betrachtet man im letzteren Fall das abgeschnittene Hinterkantenstück als zusätzliches Intervall, so stimmt in jedem Fall die Anzahl der zu bestimmenden Γ_r^*-Werte und Q_r^*-Werte mit der Anzahl der abgegrenzten Intervalle überein[1]. Bis auf das erste druckseitige Intervall bei dicken Profilen wird für jedes der abgegrenzten Intervalle nun die verschärfte kinematische Strömungsbedingung nach (32a) angesetzt. Unter Hinzunahme von (17a) genügt dieses Gleichungssystem, um auch bei den dicken Profilen die unbekannten Γ_r^*-Werte und Q_r^*-Werte (einschließlich der gegebenenfalls vorhandenen Werte D_Γ und D_Q) zu bestimmen. Die Summe in (17a) ist dabei gegebenenfalls bis $\varkappa + 1$ zu erstrecken.

Unter Berücksichtigung von (24) lauten die Gleichungen (32a) dieses Gleichungssystems für das Gitter (für Einzelflügel siehe Abschnitt 4)

$$\cos\delta_\vartheta + \operatorname{ctg}\beta_1 \sin\delta_\vartheta + \left(\sum_{r=1}^{\varkappa} Q_r^* N_{r\vartheta} + \sum_{r=1}^{\varkappa} \Gamma_r^* M_{r\vartheta}\right) l/t = 0 \tag{33}$$

mit je einer Gleichung für $\vartheta = 1, 2, \ldots$ zu den oben angegebenen Intervallen. Hierbei ist nach (32a):

$$\cos\delta_\vartheta = \int_{\xi_\vartheta}^{\xi'_\vartheta} \frac{\cos\delta(\xi)\, d\xi}{\xi'_\vartheta - \xi_\vartheta}\,. \tag{34}$$

Die Berechnung von $\sin\delta_\vartheta$, $M_{r\vartheta}$ und $N_{r\vartheta}$ erfolgt analog. Beim unendlich dünnen Profil verschwindet in Gl. (33) die Summe $\sum_{r=1}^{\varkappa} Q_r^* N_{r\vartheta}$, da $Q_r^* \equiv 0$ ist; bei Verwendung von Zusatzsingularitäten treten die entsprechenden Glieder hinzu.

Abschließend möge für die Aufstellung des Gleichungssystems noch auf einen Sonderfall hingewiesen werden: Die Aufstellung von (33) für das abgeschnittene Hinterkantenstück bei Verwendung einer zusätzlichen Einzelsenke an der Hinterkante ist etwas unbequem. Es wird deshalb die aus (33) sich ergebende Gleichung ersetzt durch

$$h_s\, w'_K(h_s) - h_d\, w'_K(h_d) = -\int_{\zeta(h)}^{l_a} q(\zeta)\, d\zeta - Q_{\varkappa+1}\,. \tag{35}$$

Der linke Teil dieser Gleichung stellt die durch den Schnitt hindurchströmende Menge dar (h_s die Schnittlänge von Skelettlinie bis Saugseite, h_d die Schnittlänge von Skelettlinie bis Druckseite, $w'_K(h_s)$ die saugseitige und $w'_K(h_d)$ die druckseitige Konturgeschwindigkeit an der Schnittstelle). Das Minuszeichen ergibt sich dabei aus der Definition von w'_K (siehe Abb. 6). Auf der rechten Seite der Gleichung steht die Menge, die in die Senken einströmt, die hinter dem Schnitt $\zeta(h)$ liegen. Mit Hilfe von (13), (21) und (24) läßt sich (35) auf die Form von (33) bringen. Dabei ergibt sich für die Konstanten anstelle von (34)

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta_\vartheta &= (h_s \sin\delta[h_s] - h_d \sin\delta[h_d])\; 10/t\,, \\ \sin\delta_\vartheta &= (h_d \cos\delta[h_d] - h_s \cos\delta[h_s])\; 10/t\,, \\ N_{r\vartheta} &= (h_s\, M_r[h_s] - h_d\, M_r[h_d])\; 10/t + 3{,}02_\varkappa + 20_{\varkappa+1}\,, \\ M_r &= (h_d\, N_r[h_d] - h_s\, N_r[h_s])\; 10/t\,. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Die Indices $\varkappa$ und $\varkappa + 1$ in der Gleichung für $N_{r\vartheta}$ bedeuten, daß die betreffenden additiven Konstanten nur bei $N_{\varkappa\vartheta}$ bzw. $N_{\varkappa+1,\vartheta}$ einzusetzen sind. Die Abhängigkeiten $[h_s]$ und $[h_d]$ bedeuten, daß die betreffenden Werte für den saugseitigen bzw. druckseitigen Konturpunkt auf der Schnittlinie zu nehmen sind.

Da die Konstanten des Gleichungssystems Gl. (33), nämlich die Größen $\cos\delta_\vartheta + \operatorname{ctg}\beta_1 \sin\delta_\vartheta$ lineare Funktionen von $\operatorname{ctg}\beta_1$ sind, ergeben sich auch für die Q_r^*-Werte und die Γ_r^*-Werte lineare Funktionen von $\operatorname{ctg}\beta_1$ in der Form

$$Q_r^* = Q_{r0}^* + Q_{r\beta}^* \operatorname{ctg}\beta_1 \qquad \text{bzw.} \qquad \Gamma_r^* = \Gamma_{r0}^* + \Gamma_{r\beta}^* \operatorname{ctg}\beta_1\,. \tag{37}$$

Damit ergibt sich für die dimensionslose Gesamtzirkulation

$$\Gamma^* = \sum_{r=1}^{\varkappa} \Gamma_r^* = \Gamma_0^* + \Gamma_\beta^* \operatorname{ctg}\beta_1 \qquad \text{mit} \qquad \Gamma_0^* = \sum_{r=1}^{\varkappa} \Gamma_{r0}^* \quad \text{und} \quad \Gamma_\beta^* = \sum_{r=1}^{\varkappa} \Gamma_{r\beta}^*\,. \tag{38}$$

[1] Die beiden zusätzlichen Intervalle bei der Verwendung des Dipoles dienen zur Bestimmung der Werte D_Q und D_Γ.

f) Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs der Kontur. Mit den Lösungen gemäß (37) können aus (24) die Geschwindigkeitsverteilungen $w'^{*}_K(\xi)$ und $w^{*}_D(\xi)$ längs der Kontur bestimmt werden. Die Abweichungen der Lösung, die sich durch $w^{*}_D(\xi) \neq 0$ ausdrücken, werden durch eine zusätzliche Quellverteilung längs der Kontur $q^{*}(\xi) = -2\,w^{*}_D(\xi)$ korrigiert. Dazu werden die von dieser Quellverteilung in Richtung der Kontur induzierten Geschwindigkeiten überschlägig bestimmt. Man erhält hierfür

$$\Delta w^{*}_K(\xi) = -\int_0^{\varepsilon} \frac{q^{*}(\xi+\chi) - q^{*}(\xi-\chi)}{2\pi\chi}\, d\chi\,. \qquad (39)$$

Es genügt hierbei, nur einen kleinen Bereich ε beiderseits des betrachteten Punktes ξ zu erfassen. Die Konturkrümmung kann daher vernachlässigt werden.

Bei der numerischen Rechnung wird (39) durch eine einfache Regel ersetzt: Die Maxima von $\Delta w^{*}_K(\xi)$ liegen dort, wo $w^{*}_D(\xi)$ den mittleren Wert zwischen zwei Extremwerten erreicht (Abb. 9). Dabei ist $\Delta w^{*}_K(\xi)$ positiv, wenn $w^{*}_D(\xi)$ mit wachsendem ξ abnimmt (Abb. 8). Die Größe der Amplituden sind bei $\Delta w^{*}_K(\xi)$ und $w^{*}_D(\xi)$ gleich.

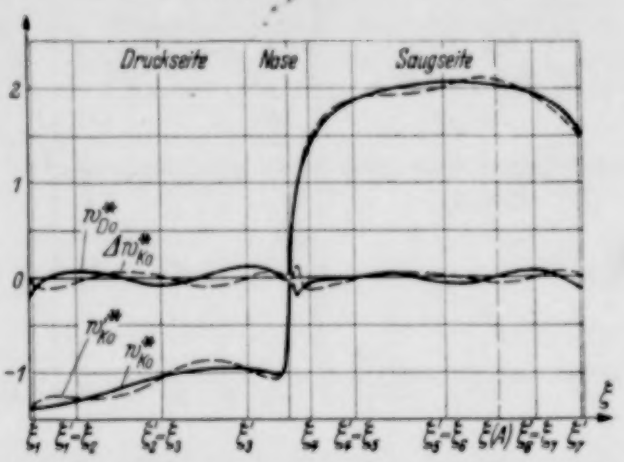

Abb. 9. Geschwindigkeitsverteilung längs der Kontur. ξ Koordinate längs der Kontur nach Abb. 8; $w^{*} = w/U$ und Index 0 für $\beta_1 = 90°$; w'_K und w_D Geschwindigkeitskomponenten nach Abb. 6 aus dem ersten Lösungsschritt; Δw_K induzierte Geschwindigkeit der zusätzlichen Quellverteilung längs der Kontur, die $w_D \equiv 0$ bewirkt; $w_K = w'_K + \Delta w_K$ Geschwindigkeit längs der Kontur aus dem zweiten Lösungsschritt.

Mit den so bestimmten Werten von $\Delta w^{*}_K(\xi)$ ergibt sich als endgültige Verteilung der Konturgeschwindigkeit gemäß Abb. 9

$$w^{*}_K(\xi) = w'^{*}_K(\xi) + \Delta w^{*}_K(\xi)\,. \qquad (40)$$

Ebenso wie Zirkulations- und Quellverteilung gemäß (37) lineare Funktionen von $\operatorname{ctg}\beta_1$ sind, ist auch $w^{*}_K(\xi)$ in allen Punkten der Kontur eine lineare Funktion von $\operatorname{ctg}\beta_1$ in der Form

$$w^{*}_K(\xi) = w^{*}_{K0}(\xi) + w^{*}_{K\beta}(\xi)\operatorname{ctg}\beta_1\,. \qquad (41)$$

Es müssen deshalb bei der numerischen Rechnung die beiden Geschwindigkeitsverteilungen $w^{*}_{K0}(\xi)$ und $w^{*}_{K\beta}(\xi)$ nach (24), (37), (39) und (40) getrennt bestimmt werden.

Für den Druck gilt nach der Bernoullischen Gleichung mit $w_K = w^{*}_K\,U$

$$p + \frac{\varrho}{2}\,w^2_K = p_1 + \frac{\varrho}{2}\,W^2_1\,. \qquad (42)$$

Daraus ergibt sich für die Druckverteilung

$$\frac{p - p_1}{q_1} = 1 - \left(\frac{w_K}{W_1}\right)^2 = 1 - (w^{*}_K \sin\beta_1)^2\,, \qquad (43)$$

wobei $q_1 = \varrho\,W^2_1/2$ den Staudruck der Zuströmgeschwindigkeit W_1 bedeutet. Diese Druckverteilung muß für jeden Zuströmwinkel β_1 nach (43) aus der entsprechenden Geschwindigkeitsverteilung w^{*}_K berechnet werden. Die Einzelheiten der numerischen Rechnung werden im Anhang I an Hand eines Zahlenbeispieles erläutert.

3. Ergebnisse und Vergleiche. In den Abb. 10, 11 und 12 sind für drei verschiedene Gitter, deren geometrische Daten in den Bildunterschriften angegeben sind, die Berechnungsergebnisse dargestellt. Die beiden Gitter in Abb. 10 und 11 haben Schaufelprofile mit großer Wölbung ($f/l = 0{,}15$ bzw. $0{,}20$) und mäßiger Dicke ($d/l = 0{,}15$ bzw. $0{,}17$), während das Gitter in Abb. 12 ein Schaufelprofil mit großer Wölbung ($f/l = 0{,}25$) und großer Dicke ($d/l = 0{,}37$) besitzt. Die berechneten Druckverteilungen und Abströmwinkel sind soweit als möglich mit Messungen verglichen worden, die im Institut für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig durchgeführt wurden[1]. Dabei ist die Übereinstimmung zwischen der vorliegenden Rechnung und den Messungen durchweg befriedigend. Bei dem Vergleich muß berücksichtigt werden, daß in der vorliegenden Rechnung die Reibung nicht berücksichtigt wird, so daß keine vollkommene Übereinstimmung von Messung und Rechnung erwartet werden kann.

Für zwei der berechneten Gitter (Abb. 10 und 12) sind außerdem die nach dem Berechnungsverfahren von *W. Traupel*[2] ermittelten Druckverteilungen eingetragen. Diese wurden von

[1] Herrn Prof. *Schlichting* möchte ich dafür danken, daß er mir diese Meßergebnisse zur Verfügung stellte.
[2] Siehe Fußnote 3 von S. 351.

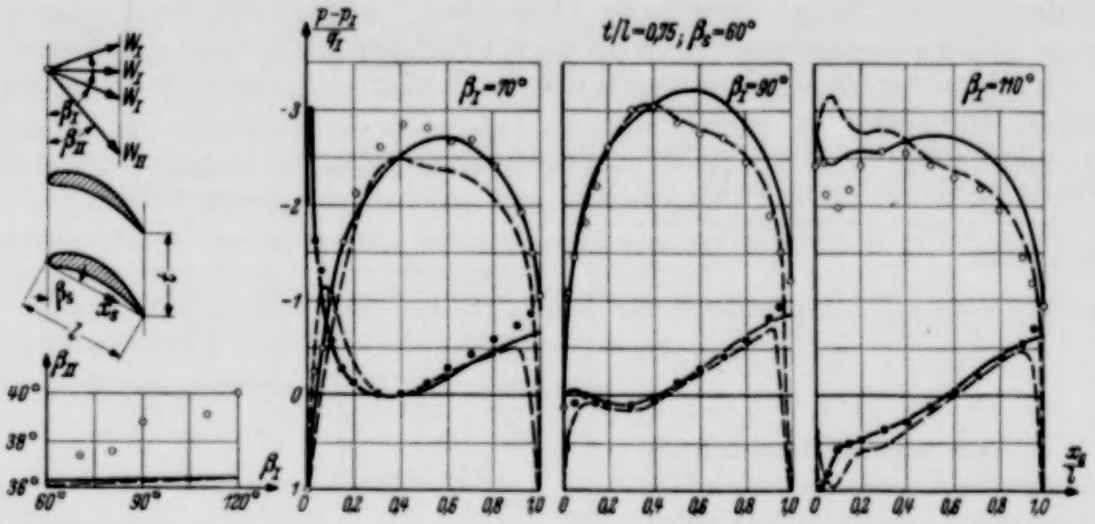

Abb. 10. Berechnungs- und Meßergebnisse für ein Turbinengitter mit Schaufelprofilen von mittlerer Wölbung und Dicke; Teilungsverhältnis $t/l = 0{,}75$; Staffelungswinkel $\beta_s = 60°$; Zahlenrechnung hierzu siehe Anhang I.

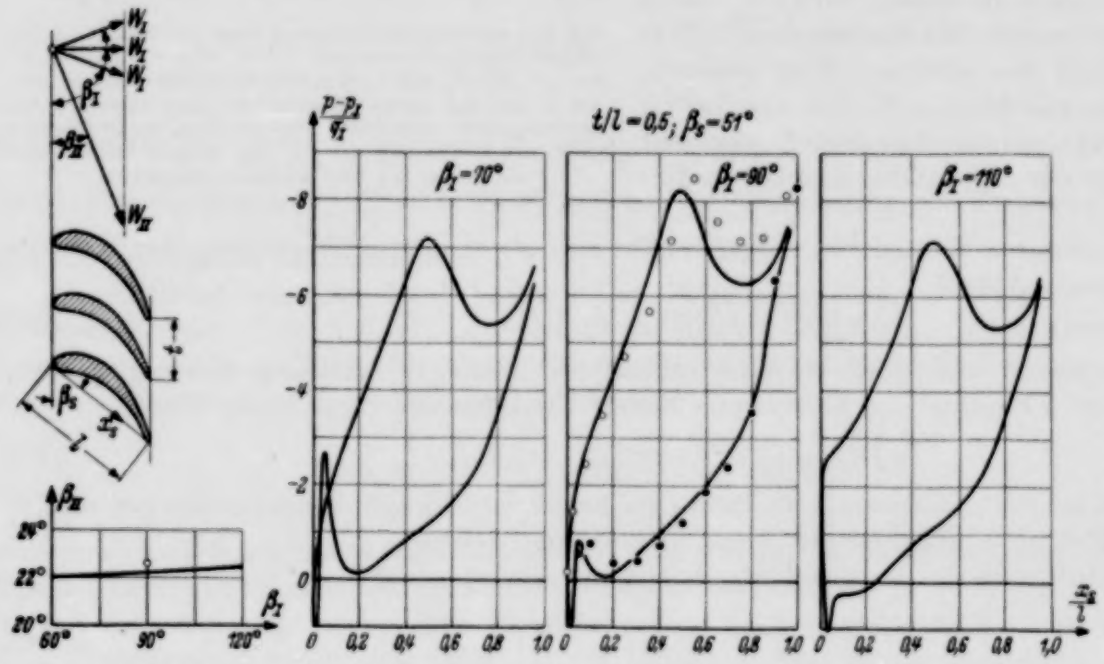

Abb. 11. Berechnungs- und Meßergebnisse für ein Turbinengitter mit Schaufelprofilen von starker Wölbung und mittlerer Dicke; Teilungsverhältnis $t/l = 0{,}5$; Staffelungswinkel $\beta_s = 51°$.

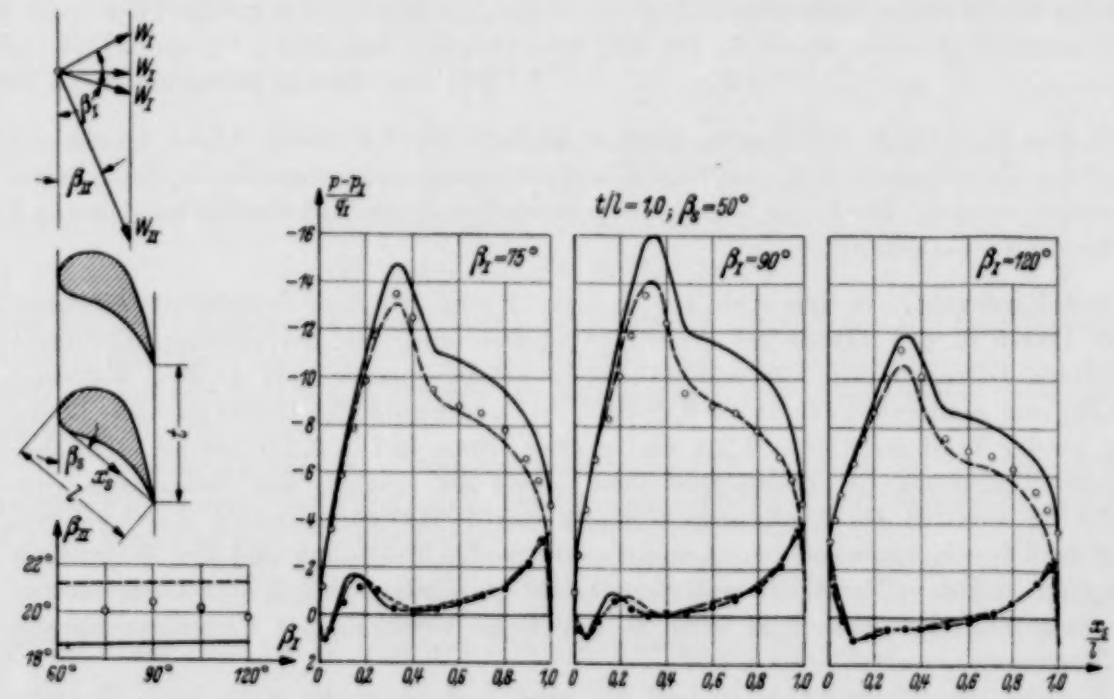

Abb. 12. Berechnungs- und Meßergebnisse für ein Turbinengitter mit Schaufelprofilen von großer Wölbung und Dicke; Teilungsverhältnis $t/l = 1{,}0$; Staffelungswinkel $\beta_s = 50°$.

Abb. 10 bis 12. Schaufelgitter (links) mit drei Zuströmwinkeln β_I; Abströmwinkel β_{II} in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel β_I nach Rechnung und Messung; Druckverteilungen für die drei eingetragenen Zuströmwinkel β_I aufgetragen über der Profilsehne l (rechts), dabei gelten untere Kurve und volle Punkte für die Profilunterseite (Druckseite), obere Kurve und offene Punkte für die Oberseite (Saugseite).

Punkte = Messungen des Institutes für Strömungsmechanik der T.H. Braunschweig; gestrichelte Kurven = Berechnung von *G. Hubert* nach *W. Traupel*; ausgezogene Kurven = eigene Berechnung.

G. Hubert[1] übernommen. Da sie teilweise besser mit den Messungen übereinstimmen, als die hier berechneten Lösungen, wird angenommen, daß die Unterschiede Fehler des vorliegenden Verfahrens sind.

4. Berechnung des Einzelflügels. Das entwickelte Verfahren kann auch zur Berechnung der Druckverteilung des Einzelflügels verwendet werden. Dieser Fall ergibt sich durch den Grenzübergang $t \to \infty$. Dabei erhält man aus (7) $\beta_{II} = \beta_I = \beta_\infty$ und außerdem $\beta_\infty = 90° + \alpha$, wobei α den auf die Profilsehne bezogenen Anstellwinkel bedeutet.

Da die Zerlegung des Auftriebes A nach (1) in die Komponenten senkrecht und parallel zur Gitterachse hinfällig wird, setzen wir für den Auftrieb

$$A = c_A \frac{\varrho}{2} W_\infty^2 \, b \, l \,. \tag{44}$$

Dabei ist

$$c_A = 4 \, \Gamma^* \cos \alpha$$

mit

$$\Gamma^* = \frac{\Gamma}{2 \, l \, U} = \frac{\Gamma}{2 \, l \, W_\infty \cos \alpha} \,.$$

Bis zur Gleichung (23) sind im Abschnitt **2** Gitter und Einzelflügel gemeinsam behandelt worden. Von da ab schien es sinnvoller, zunächst das Gitter allein zu behandeln, da durch die unterschiedliche Definition des Zu- und Abströmwinkels β_I bzw. β_{II} beim Gitter gegenüber dem Anstellwinkel α beim Einzelflügel und durch die unterschiedliche Bezugslänge der Einflußfunktionen $\dot{\mu}$ (mit Bezugslänge t) und $\dot{\mu}_E$ (mit Bezugslänge l) eine stärkere Trennung notwendig wird[2].

Zur Umstellung der Gleichungen (24) bis (43) auf die Berechnung des Einzelflügels genügt es, folgendes zu ändern:

$\operatorname{ctg} \beta_I$	wird ersetzt durch	$-\operatorname{tg} \alpha$,
t	wird ersetzt durch	l ,
$\dot{\mu}(\ldots)$	wird ersetzt durch	$\dot{\mu}_E(\ldots) - 1$,
$\dot{\nu}(\ldots)$	wird ersetzt durch	$\dot{\nu}_E(\ldots)$,
$\sin \beta_I$	wird ersetzt durch	$\cos \alpha$.

Um Unklarheiten zu vermeiden, sollen die Gleichungen (25) und (26) nochmals ausführlich angegeben werden. Sie lauten für den Einzelflügel

$$M_r = \dot{\mu}_{Er} \sin \delta + \dot{\nu}_{Er} \cos \delta \,, \qquad N_r = \dot{\mu}_{Er} \cos \delta - \dot{\nu}_{Er} \sin \delta \,, \tag{24E}$$

$$\left.\begin{aligned} M_r &= \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10}{}' \, \dot{\mu}_E \left(z - z[\tau_\lambda]\right) \sin \delta + \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10}{}' \, \dot{\nu}_E \left(z - z[\tau_\lambda]\right) \cos \delta \pm \Delta M \,, \\ N_r &= \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10}{}' \, \dot{\mu}_E \left(z - z[\tau_\lambda]\right) \cos \delta - \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10}{}' \, \dot{\nu}_E \left(z - z[\tau_\lambda]\right) \sin \delta + \Delta N \,. \end{aligned}\right\} \tag{26E}$$

Hierbei bedeutet das Zeichen $\sum'$: Bei Punkten mit $h/l_j \leqq 0{,}4$ sind die Werte $\dot{\mu}_E$ und $\dot{\nu}_E$, deren $z[\tau_\lambda]$ auf dem von z auf die Skelettlinie gefällten Lot liegen, auszulassen. — Die Herleitung der Gleichungen (24) bis (43) für den Einzelflügel erfolgt analog zum Gitter und braucht deshalb nicht näher erläutert zu werden.

Als Beispiel wurden hiernach die Druckverteilungen für das Göttinger Profil 387 berechnet. Sie sind in Abb. 13 aufgetragen und mit Messungen[3] verglichen. Dabei wurde die ebene Strömung nach dem Ansatz von *L. Prandtl*[4] auf die Strömung um einen Flügel mit endlicher Spannweite umgerechnet. Hiernach gilt

$$\alpha - \frac{c_a \, l}{\pi \, b} = \alpha_\infty \,. \tag{45}$$

---

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 351.

[2] Es sei erwähnt, daß sich der zweite Grund dadurch umgehen ließe, daß man beim Gitter anstelle der Einflußfunktionen $\dot{\mu}$ und $\dot{\nu}$ die Funktionen $\dot{\mu}_G = \dot{\mu} \, l/t$ und $\dot{\nu}_G = \dot{\nu} \, l/t$ verwendet. Diese brauchten bei der Berechnung des Einzelflügels nur durch $\dot{\mu}_E$ und $\dot{\nu}_E$ ersetzt zu werden. Eine derartige Darstellung der Gleichungen für die Gitterrechnung hätte aber zur Folge, daß bei der numerischen Rechnung sehr viele zusätzliche Multiplikationen erforderlich sind, um die benötigten Werte $\dot{\mu}_G$ und $\dot{\nu}_G$ zu bestimmen. Es dürfte deshalb sinnvoller sein, auf diese Möglichkeit zu verzichten.

[3] *L. Prandtl*, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. II. Lieferung. S. 45. München 1923.

[4] *L. Prandtl*, Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. I. Lieferung. S. 37. München 1921.

Zwischen dem Auftriebsbeiwert c_a für den Flügel endlicher Spannweite mit elliptischer Auftriebsverteilung und dem Auftriebsbeiwert c_A bei ebener Strömung besteht der Zusammenhang

$$c_a = \frac{\pi}{4} c_A = \pi \Gamma^* \cos \alpha_\infty = \pi \Gamma_0^* - \pi \Gamma_\beta^* \alpha_\infty . \tag{46}$$

Im letzten Ausdruck von (46) wurde $\cos \alpha_\infty$ durch 1 und $\sin \alpha_\infty$ durch α_∞ ersetzt. Dies dürfte ebenso wie bei (45) zulässig sein, da beim Einzelflügel nur kleine Werte von α_∞ interessieren.

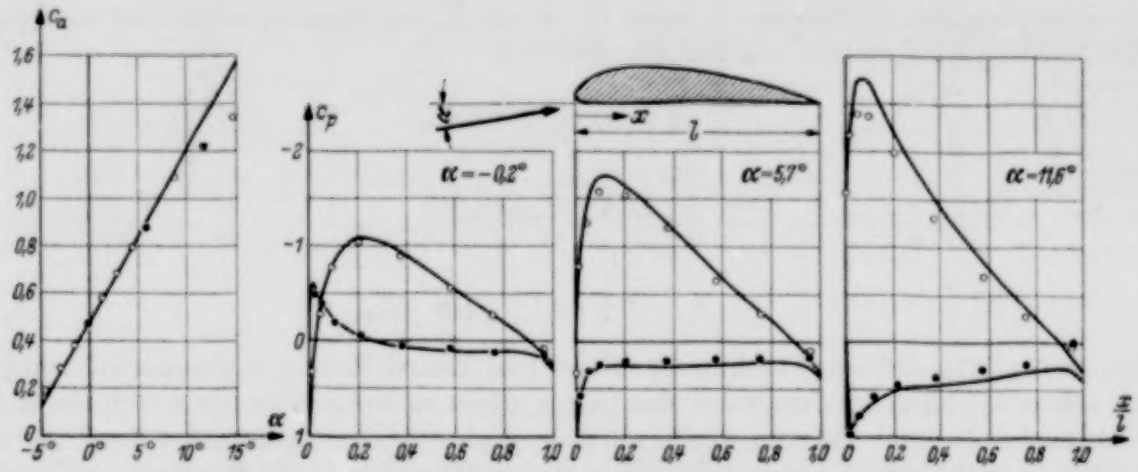

Abb. 13. Berechnungs- und Meßergebnisse für einen Einzelflügel. Auftriebsbeiwert c_a in Abhängigkeit vom Zuströmwinkel α für den Einzelflügel mit $b/l = 5$ (links); Druckverteilungen $c_p = (p - p_\infty)/q_\infty$ aufgetragen über der Profilsehne für drei verschiedene Zuströmwinkel (obere Kurve für Ober-, untere Kurve für Unterseite des Flügels).

Punkte = Messungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen; Kurven = Berechnung.

Durch Eliminieren von α_∞ für $b_\infty/l_\infty = \infty$ folgt aus (45) und (46)

$$c_a = \pi \frac{\Gamma_0^* - \Gamma_\beta^* \alpha}{1 - \frac{l}{b} \Gamma_\beta^*} \tag{47}$$

als Auftriebsbeiwert für den endlich breiten Flügel mit b/l und Anstellwinkel α (im Bogenmaß einsetzen).

Zur Berechnung der Druckverteilungen in der Flügelmitte muß noch der Winkel α_∞ der zugeordneten ebenen Strömung bestimmt werden. Dafür ergibt sich aus (46) und (47) durch Eliminieren von c_a

$$\alpha_\infty = \frac{\Gamma_0^* - \alpha\, b/l}{\Gamma_\beta^* - b/l} . \tag{48}$$

Mit diesem Winkel α_∞ wurden die Druckverteilungen von Abb. 13 berechnet. Die Übereinstimmung von Messung und Rechnung ist erstaunlich gut.

5. Zusammenfassung. Es wird ein Verfahren zur Berechnung der Druckverteilung an beliebig vorgegebenen ebenen Schaufelgittern bei reibungsfreier, inkompressibler Strömung mitgeteilt. Insbesondere ist das vorgeschlagene Verfahren auch anwendbar für Gitter mit Schaufelprofilen von großer Wölbung und großer Dicke. Das neue Verfahren ist ein Näherungsverfahren, das nach der Singularitätenmethode arbeitet. Dabei ist ein System von acht linearen Gleichungen zu lösen. Das vorliegende Verfahren wurde durch mehrere Beispielrechnungen erprobt, wobei sich durchweg befriedigende Übereinstimmung mit Messungen ergab. Die teils numerische, teils graphische Rechnung dauert etwa 50 Stunden pro Gitter.

Das vorgeschlagene Verfahren ist eine Erweiterung des Verfahrens von *H. Schlichting*[1], für das eine Berechnungszeit von 20 bis 25 Stunden pro Gitter angegeben wird, auf Gitter mit stark gewölbten dicken Profilen.

Das graphische Berechnungsverfahren von *W. Traupel*[2] scheint noch etwas genauere Ergebnisse zu liefern, als das vorliegende Verfahren. Jedoch beträgt bei jenem Verfahren die Berechnungszeit nach *G. Hubert*[3] etwa 200 Stunden pro Gitter.

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 351.
[2] Siehe Fußnote 3 von Seite 351.
[3] Siehe Fußnote 4 von Seite 351.

Anhang I. Beispiel-Rechnung. Die praktische Durchführung der Rechnung soll für das Gitter von Abb. 10 gezeigt werden. Dabei wird mit vier Singularitätenverteilungen ($\varkappa = 4$) gerechnet. Die Rechnung verläuft folgendermaßen.

Eine Schaufel des Gitters wird so groß auf Transparentpapier gezeichnet, daß die Gitterteilung t mit der Teilung des Diagramms der Einflußfunktionen von Abb. 3 übereinstimmt. Gemäß Abb. 8 werden die Skelettlinie und die τ_λ-Punkte nach Tabelle 1 eingetragen. Sodann werden etwa 20 einigermaßen gleichmäßig verteilte Konturpunkte eingetragen (siehe Abb. 8). Innerhalb des Bereiches mit $h/l_j < 0{,}4$ müssen diese Konturpunkte so eingetragen werden, daß sie auf den Senkrechten zur Skelettlinie liegen, die durch die τ_λ-Punkte laufen.

Tabelle 6. *Berechnung eines Beispieles: Ermittlung der M- und N-Werte für den Konturpunkt A von Bild 6 und 8 nach Gl. (26)*

Spalte 1
Koordinaten nach Abb. 6, 8, 10

$x_s/l = 0{,}707$
$\xi/l = 1{,}845$
$\delta = 140{,}9°$
$\sin\delta = 0{,}632$
$\cos\delta = -0{,}776$
$h/l_j = 0{,}24$

Spalte 2
Koordinaten m-, n-Werte

$\varepsilon = -5{,}3°$
nach Abb. 6
$\cos\varepsilon = 0{,}995$
$\sin\varepsilon = -0{,}092$
$3\,\tau(z) = 5{,}55$
nach Abb. 8
$3\,\tau = 5{,}55 > 3$
nach Gl. (18)
$3\,\tau_2 = 3{,}55 > 3$
nach Gl. (19)
$3\,\tau_3 = 1{,}55 < 3$
nach Gl. (20)
$m_3 = 0{,}079$
$n_3 = 0{,}082$
nach Tab. 4
$3\,\tau_4 = -0{,}45 > -3$
nach Gl. (21)
$m_4 = 0{,}022$
$n_4 = 0{,}368$
nach Tab. 4

Spalte 3
$\dot\mu$- und $\dot\nu$-Werte aus Abb. 3 $3\,\tau_\lambda$ nach Tab. 1

$3\,\tau_\lambda$	$\dot\mu$	$\dot\nu$
0,05	+0,998	—0,004
0,40	0,995	—0,01
0,85	0,99	—0,015
1,20	0,99	—0,025
1,55	0,98	—0,03
1,85	0,98	—0,05
2,15	0,98	—0,07
2,45	0,975	—0,10
2,80	0,98	—0,14
3,20	1,00	—0,22
3,55	1,06	—0,31
3,85	1,14	—0,41
4,15	1,29	—0,55
4,45	1,54	—0,72
4,80	2,13	—0,96
5,20	4,10	—0,80
5,55	0,03*)	—0,03*)
5,85	—0,57	4,60
6,15	—1,08	2,45
6,45	—0,96	1,52
6,80	—0,82	0,99
7,15	—0,74	0,68
7,60	—0,69	0,40

*) $\dot\mu_R$ bzw. $\dot\nu_R$ da hierbei $3\,\tau_\lambda = 3\,\tau(z)$ ist

Spalte 4
Summen von Spalte 3 nach Tab. 1

$$\mu_r = \frac{1}{10}\sum_{\lambda=1}^{10_R}\dot\mu$$

$$\nu_r = \frac{1}{10}\sum_{\lambda=1}^{10_R}\dot\nu$$

$\mu_1 = 0{,}994$
$\nu_1 = -0{,}010$
$\mu_2 = 1{,}001$
$\nu_2 = -0{,}107$
$\mu_3 = 1{,}365$
$\nu_3 = 0{,}042$
$\mu_4 = 0{,}269$
$\nu_4 = 0{,}830$

Spalte 5
ΔM- und ΔN-Werte nach Gl. (27)

$\Delta M_3 = 1{,}873\,(0{,}079 \cdot 0{,}995 - 0{,}082 \cdot 0{,}092) = 0{,}133$
$\Delta N_3 = 1{,}873\,(-0{,}079 \cdot 0{,}092 - 0{,}082 \cdot 0{,}995) = -0{,}167$
$\Delta M_4 = 1{,}873\,(0{,}022 \cdot 0{,}995 - 0{,}368 \cdot 0{,}092) = -0{,}023$
$\Delta N_4 = 1{,}873\,(-0{,}022 \cdot 0{,}092 - 0{,}368 \cdot 0{,}995) = -0{,}689$

Spalte 6
M- und N-Werte nach Gl. (26) aus Spalte 4, 5

$M_1 = 1{,}994 \cdot 0{,}632 + 0{,}010 \cdot 0{,}776 = 1{,}268$
$N_1 = -1{,}994 \cdot 0{,}776 + 0{,}010 \cdot 0{,}632 = -1{,}541$

$M_2 = 2{,}001 \cdot 0{,}632 + 0{,}107 \cdot 0{,}776 = 1{,}348$
$N_2 = -2{,}001 \cdot 0{,}776 + 0{,}107 \cdot 0{,}632 = -1{,}485$

$M_3 = 2{,}365 \cdot 0{,}632 - 0{,}042 \cdot 0{,}776 + 0{,}133 = 1{,}595$
$N_3 = -2{,}365 \cdot 0{,}776 - 0{,}042 \cdot 0{,}632 - 0{,}167 = -2{,}029$

$M_4 = 1{,}269 \cdot 0{,}632 - 0{,}830 \cdot 0{,}776 - 0{,}023 = 0{,}135$
$N_4 = -1{,}269 \cdot 0{,}776 - 0{,}830 \cdot 0{,}632 - 0{,}689 = -2{,}198$

Für alle diese Konturpunkte werden nun die Einflußfunktionen M und N nach (26) bestimmt. Die dazu erforderliche Zahlenrechnung ist in Tabelle 6 für den Konturpunkt A von Abb. 6 und 8 ausführlich dargestellt. Für alle übrigen Konturpunkte erfolgt sie in genau derselben Weise:

Spalte 1 von Tabelle 6 enthält die Koordinaten des Konturpunktes, die aus der Aufzeichnung gemäß Abb. 6, 8 und 10 entnommen werden können. Spalte 2 und 5 werden nur bei solchen Konturpunkten benötigt, deren $h/l_j < 0{,}4$ ist. Dabei ist $3\,\tau(z)$ in Spalte 2 der Fußpunkt der Senkrechten zur Skelettlinie, auf der der Konturpunkt liegt. Die m- und n-Werte werden nur für die Verteilungen $\sigma(\tau)$ bestimmt, innerhalb deren Definitionsbereich der Punkt $3\,\tau(z)$ liegt. Das trifft im vorliegenden Fall nur für die Verteilungen $\sigma_3(\tau)$ und $\sigma_4(\tau)$ zu, da sowohl $3\,\tau > 3$, als auch $3\,\tau_2 > 3$ ist. Die ΔM- und ΔN-Werte werden in Spalte 5 aus den Werten von Spalte 2 nach (27) berechnet.

Spalte 3 von Tabelle 6 enthält die für die τ_λ-Punkte der Skelettlinie aus Abb. 3 entnommenen $\dot\mu$- und $\dot\nu$-Werte. Hierzu wurde das aufgezeichnete Profil so auf die beiden Diagramme aufgelegt, daß sich der Konturpunkt A mit dem jeweiligen Diagramm-Mittelpunkt deckt, die Gitterrichtung zur Mittelsenkrechten des Diagramms parallel ist und das Profil von rechts nach links umströmt wird (d. h. gegenüber den Abb. dieses Aufsatzes um 180° gedreht ist). In dieser Lage des Profiles können die $\dot\mu$- bzw. $\dot\nu$-Werte der Spalte 3 in den entsprechenden $3\,\tau_\lambda$-Punkten der Skelettlinie dem jeweiligen Diagramm entnommen werden.

Spalte 4 enthält die gemäß Tabelle 1 gebildeten Summen der Werte von Spalte 3. Spalte 6 zeigt schließlich die Berechnung der M- und N-Werte aus den Werten von Spalte 4 und 5 nach (26).

Nach Durchführung dieser Rechnung für die anderen Konturpunkte werden die Einflußfunktionen M und N, sowie die Funktionen $2\cos\delta$ und $2\sin\delta$ gemäß Abb. 14 über ξ aufgetragen. Die in Abb. 8 nach Abschnitt 2e eingezeichneten

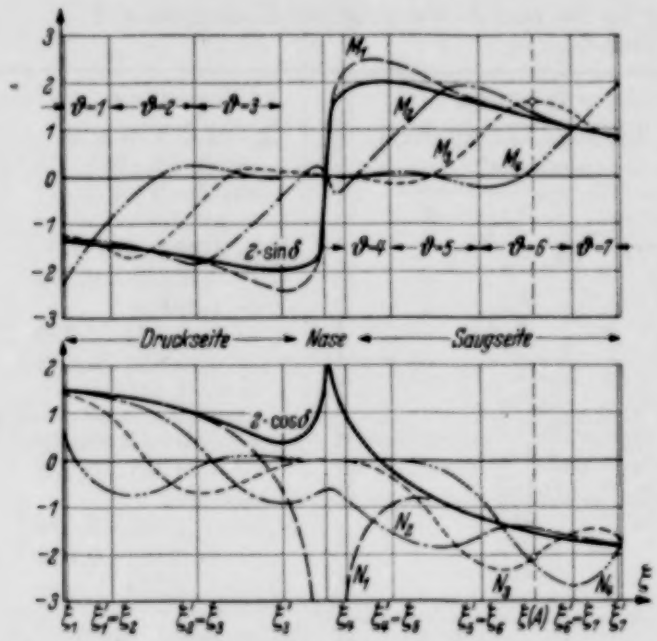

Abb. 14. Auftragung der Einflußfunktionen M und N über der abgewickelten Kontur zum Beispiel von Abb. 10; $\vartheta = 1; 2; \ldots$ Intervalle (Abb. 8) zur Aufstellung der einzelnen Gleichungen des Gleichungssystems (Tabelle 7).

Konturpunkte ξ_ϑ und $\bar{\xi}_\vartheta$ werden in Abb. 14 übertragen. Sodann werden die Koeffizienten des Gleichungssystems (33) nach (34) aus Abb. 14 entnommen (Mittelwerte der aufgetragenen Funktionen in den einzelnen Intervallen). Das so aufgestellte Gleichungssystem ist in Tabelle 7 angegeben. Die letzte Gleichung ist die Schließungsbedingung nach (17a). Zur Vereinfachung der numerischen Berechnung ist beim Gitter der Faktor l/t von (33) in die Unbekannten $\Gamma^0 = \Gamma^* l/t$ und $Q^0 = Q^* l/t$ einbezogen. Die in Tabelle 7 ebenfalls angegebenen Lösungen $Q_1^*, \ldots, Q_4^*; \Gamma_1^*, \ldots \Gamma_4^*$ sind lineare Funktionen von $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$. Man erhält sie am einfachsten durch Eliminieren der Unbekannten mit dem größten (zur Vermeidung von Rundungsfehlern) Koeffizienten. Aus der Gesamtzirkulation nach (15) ergeben sich die Kraftbeiwerte nach (6) und der Abströmwinkel nach (7).

In Tabelle 8 werden für den Konturpunkt A (Abb. 6) die Geschwindigkeiten $w_K'^*$ und w_D^* nach (24) berechnet. Dabei sind die Anteile 0 und β gemäß (41) getrennt. Diese Rechnung erfolgt wieder für alle übrigen Konturpunkte in gleicher Weise. Die Ergebnisse für den Anteil 0 ($\beta_\mathrm{I} = 90°$) sind in Abb. 9 über ξ aufgetragen. Ebenso wie dort Δw_{K0}^* bestimmt wurde, wird außerdem aus

Tabelle 7. *Berechnung eines Beispieles (Fortsetzung): Das Gleichungssystem (33) mit Lösung (Beispiel nach Abb. 10)*

		Bezeichnung der Koeffizienten gemäß Gl. (33) und (34); Werte aus Abb. 14 entnommen				
$\cos\delta_\vartheta$	$\sin\delta_\vartheta$	$N_{1\vartheta}$	$N_{2\vartheta}$	$N_{3\vartheta}$	$M_{4\vartheta}$	
0,706	—0,707 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	+1,410 Q_1^0	+1,380 Q_2^0	+1,165 Q_3^0	—1,550 Γ_4^0 = 0	für ϑ = 1
0,589	—0,803 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	+1,145 Q_1^0	+0,900 Q_2^0	—0,070 Q_3^0	—0,160 Γ_4^0 = 0	für ϑ = 2
0,341	—0,932 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	+0,300 Q_1^0	—0,525 Q_2^0	—0,445 Q_3^0	+0,100 Γ_4^0 = 0	für ϑ = 3
0,109	+0,984 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	—1,445 Q_1^0	—1,310 Q_2^0	—0,175 Q_3^0	+0,015 Γ_4^0 = 0	für ϑ = 4
—0,408	+0,900 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	—0,990 Q_1^0	—1,745 Q_2^0	—1,340 Q_3^0	—0,040 Γ_4^0 = 0	für ϑ = 5
—0,751	+0,652 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	—1,495 Q_1^0	—1,490 Q_2^0	—2,035 Q_3^0	+0,130 Γ_4^0 = 0	für ϑ = 6
—0,879	+0,476 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	—1,755 Q_1^0	—1,730 Q_2^0	—1,610 Q_3^0	+1,400 Γ_4^0 = 0	für ϑ = 7
0	0	+1,000 Q_1^0	+1,000 Q_2^0	+1,000 Q_3^0	0 = 0	Gl. (17a)

Gesamtzirkulation

$\Gamma^* = 0{,}511 - 0{,}373 \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$

Ergebnisse nach Gl. (6) und (7)

$c_y = 2{,}044 - 1{,}492 \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$

$c_x = 1{,}044 + 0{,}519 \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I} - 0{,}935 \operatorname{ctg}^2\beta_\mathrm{I}$

$\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{II} = 1{,}362 + 0{,}006 \operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$

Lösungen nach Gl. (37) und (38)

$Q_1^0 = Q_1^* l/t =$	0,151	+ 0,013 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	$\Gamma_1^0 = \Gamma_1^* l/t =$	— 0,028	— 0,396 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$
$Q_2^0 = Q_2^* l/t =$	— 0,075	— 0,003 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	$\Gamma_2^0 = \Gamma_2^* l/t =$	0,366	— 0,076 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$
$Q_3^0 = Q_3^* l/t =$	0,095	— 0,006 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	$\Gamma_3^0 = \Gamma_3^* l/t =$	0,145	— 0,018 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$
$Q_4^0 = Q_4^* l/t =$	— 0,171	— 0,004 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$	$\Gamma_4^0 = \Gamma_4^* l/t =$	0,198	— 0,007 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$
$Q^0 = Q^* l/t =$	0		$\Gamma^0 = \Gamma^* l/t =$	0,681	— 0,497 $\operatorname{ctg}\beta_\mathrm{I}$

Tabelle 8. *Berechnung eines Beispieles (Fortsetzung): Ermittlung von Geschwindigkeit und Druck für den Konturpunkt A von Bild 6 und 8 nach Gl. (24, 40, 41 und 43)*

Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4	Spalte 5
Werte nach Tabelle 6	Werte nach Tabelle 7 Anordnung gemäß Gl. (24)			
$\sin\delta = 0{,}632$ $\cos\delta = -0{,}776$	$1{,}000$ 0	0 $1{,}000$	0 $-1{,}000$	$1{,}000$ 0
$M_1 = 1{,}268$ $M_2 = 1{,}348$ $M_3 = 1{,}595$ $M_4 = 0{,}135$	$Q^0_{10} = 0{,}151$ $Q^0_{20} = -0{,}075$ $Q^0_{30} = 0{,}095$ $Q^0_{40} = -0{,}171$	$\Gamma^0_{10} = -0{,}028$ $\Gamma^0_{20} = 0{,}366$ $\Gamma^0_{30} = 0{,}145$ $\Gamma^0_{40} = 0{,}198$	$Q^0_{1\beta} = 0{,}013$ $Q^0_{2\beta} = -0{,}003$ $Q^0_{3\beta} = -0{,}006$ $Q^0_{4\beta} = -0{,}004$	$\Gamma^0_{1\beta} = -0{,}396$ $\Gamma^0_{2\beta} = -0{,}076$ $\Gamma^0_{3\beta} = -0{,}018$ $\Gamma^0_{4\beta} = -0{,}007$
$N_1 = -1{,}541$ $N_2 = -1{,}485$ $N_3 = -2{,}029$ $N_4 = -2{,}198$	$-\Gamma^0_{10} = 0{,}028$ $-\Gamma^0_{20} = -0{,}366$ $-\Gamma^0_{30} = -0{,}145$ $-\Gamma^0_{40} = -0{,}198$	$Q^0_{10} = 0{,}151$ $Q^0_{20} = -0{,}075$ $Q^0_{30} = 0{,}095$ $Q^0_{40} = -0{,}171$	$-\Gamma^0_{1\beta} = 0{,}396$ $-\Gamma^0_{2\beta} = 0{,}076$ $-\Gamma^0_{3\beta} = 0{,}018$ $-\Gamma^0_{4\beta} = 0{,}007$	$Q^0_{1\beta} = 0{,}013$ $Q^0_{2\beta} = -0{,}003$ $Q^0_{3\beta} = -0{,}006$ $Q^0_{4\beta} = -0{,}004$
nach Gl. (24): Produktsumme der Spalten	$w'^*_{K0} = 2{,}080$ 1 und 2	$w^*_{D0} = 0{,}001$ 1 und 3	$w'^*_{K\beta} = 0{,}003$ 1 und 4	$w^*_{D\beta} = 0{,}003$ 1 und 5

nach Abb. 9: $\Delta w^*_{K0} = -0{,}060$ analog dazu: $\Delta w^*_{K\beta} = -0{,}002$
nach Gl. (40) und (41) $w^*_K = 2{,}020 + 0{,}001\ \mathrm{ctg}\,\beta_I$ (für Punkt A)

nach Gl. (43) für	$\beta_I = 70°$	90°	110°	zu Abb. 10
	$(p - p_I)/q_I = -2{,}60$	$-3{,}08$	$-2{,}60$	bei $x_s/l = 0{,}7$

der Auftragung von $w^*_{D\beta}$ über ξ das $\Delta w^*_{K\beta}$ bestimmt. Außer der Geschwindigkeit w^*_K nach (41) zeigt Tabelle 8 schließlich noch die Berechnung der Druckverteilung $(p - p_I)/q_I$ nach (43) für die drei Zuströmwinkel β_I von Abb. 10. Auch diese Rechnung ist für alle übrigen Konturpunkte in gleicher Weise durchzuführen.

Anhang II. Berechnung der induzierten Geschwindigkeiten der vorgegebenen Singularitätenverteilungen. Analog zu (12) wird für die induzierten Geschwindigkeiten angesetzt: für den Einzelflügel

$$u^*_{ir} = Q^*_r\,\mu_{Er} + \Gamma^*_r\,\nu_{Er}\,, \qquad v^*_{ir} = Q^*_r\,\nu_{Er} - \Gamma^*_r\,\mu_{Er}\,, \tag{49a}$$

für das Gitter

$$u^*_{ir} = (Q^*_r\,\mu_r + \Gamma^*_r\,\nu_r)\,l/t\,; \qquad v^*_{ir} = (Q^*_r\,\nu_r - \Gamma^*_r\,\mu_r)\,l/t\,, \tag{49b}$$

für das Restgitter

$$u^*_{ir} = (Q^*_r\,\mu_{Rr} + \Gamma^*_r\,\nu_{Rr})\,l/t\,; \qquad v^*_{ir} = (Q^*_r\,\nu_{Rr} - \Gamma^*_r\,\mu_{Rr})\,l/t\,. \tag{49c}$$

Dabei ist

$$\mu_r = \int_0^{2\varkappa/3} \sigma_r(\tau)\,\dot{\mu}\,(z - z[\tau])\,d\tau\,, \quad \nu_r = \int_0^{2\varkappa/3} \sigma_r(\tau)\,\dot{\nu}\,(z - z[\tau])\,d\tau\,. \tag{50}$$

Analog dazu werden μ_{Er} aus $\dot{\mu}_E$ und ν_{Er} aus $\dot{\nu}_E$, sowie μ_{Rr} aus $\dot{\mu}_R$ und ν_{Rr} aus $\dot{\nu}_R$ berechnet.

Für alle Funktionen $\sigma_r(\xi)$ ist

$$I_r(\tau) = \int_0^{\tau} \sigma_r(\tau)\,d\tau \tag{51}$$

monoton steigend von 0 bis 1. Man kann deshalb anstelle von (50) schreiben

$$\mu_r = \int_0^1 \dot{\mu}\,(z - z[\tau])\,dI_r(\tau)\,. \tag{52}$$

Diese Gleichung (52) und die folgenden Gleichungen (53) und (54) gelten für μ_{Er} und μ_{Rr}, sowie für ν_r, ν_{Er} und ν_{Rr} analog.

Bei der numerischen Rechnung wird das Integral der Gleichung (52) durch eine Summe ersetzt. Hierzu wird $I_r(\tau)$ in Z gleichlange Stücke unterteilt und $z(\tau)$ jeweils für deren Mitte bestimmt. Es ergibt sich

$$\mu_r = \frac{1}{Z} \sum_{\lambda=1}^{Z} \dot{\mu}\,(z - z[\tau_\lambda]) \tag{53}$$

mit τ_λ aus

$$\int_0^{\tau_\lambda} \sigma_r(\tau)\, d\tau = \frac{2\lambda - 1}{2Z} \qquad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots Z\,. \tag{54}$$

Für Punkte z, deren Abstand von der Skelettlinie größer ist als $0{,}4\, l_j$, genügt erfahrungsgemäß eine Summe mit $Z = 10$. Für diesen Fall sind die erforderlichen τ_λ-Werte nach (54) für jede der ausgewählten Verteilungen berechnet und in Tabelle 1 angegeben. Für die Verteilung $\sigma_1(\tau)$ ist dabei zu beachten, daß am Ort der tabellierten τ_λ-Werte z. T. mehrere Einzelsingularitäten zusammengefaßt wurden, so daß die zugehörigen Werte $\dot{\mu}\,(z - z[\tau_\lambda])$ gemäß Tabelle 1 mehrfach in (53) einzusetzen sind. Diese Zusammenfassung wurde gewählt, um trotz der Unendlichkeitsstelle der Funktion $\sigma_1(\tau)$ mit möglichst gleichmäßig verteilten Singularitäten auszukommen.

Für Punkte z, deren Abstand von der Skelettlinie kleiner ist als $0{,}4\, l_j$, müßte zur Berechnung von μ_r nach (53) Z entsprechend erhöht werden. Da das für die numerische Rechnung zu mühsam wäre, sollen Hilfswerte tabelliert werden, mit denen die μ- und ν-Werte für Punkte z in diesem Bereich einfacher bestimmt werden können. Erfaßt wurden dabei — ausgenommen im Bereich der Profilnase — nur solche Punkte z, die sich auf den durch die τ_λ-Punkte laufenden Senkrechten zur Skelettlinie befinden. In der Umgebung der Profilnase wurden die Hilfswerte für Punkte bestimmt, die auf der Tangente an die Skelettlinie im Punkt $3\tau = 0{,}05$ und auf den durch diesen Punkt verlaufenden Strahlen liegen, die um 45° gegen die Tangente geneigt sind (siehe Abb. 7).

Zu jeder der Grundverteilungen nach (18) bis (21) wurden für deren Anordnung auf der x-Achse die Werte μ_{Er} und ν_{Er} mit hinreichend großem Z berechnet. Diese Werte sind dem Verhältnis l/l_j direkt proportional, da die in (53) einzusetzenden Werte $\dot{\mu}$ nach (11a) proportional l und umgekehrt proportional zu $x - x[\tau_\lambda] = 3\, l_j\,(\tau - \tau_\lambda)$ sind, gemäß der Definition von τ in (13). Da zwischen den Längen l und l_j keine direkte Beziehung besteht, sollen die Hilfswerte in folgender Form gebildet werden:

$$m_r = \frac{3\, l_j}{l}\left[\mu_{Er} - \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10'} \dot{\mu}_E\,(z - x[\tau_\lambda])\right], \qquad n_r = \frac{3\, l_j}{l}\left[\nu_{Er} - \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10'} \dot{\nu}_E\,(z - x[\tau_\lambda])\right]. \tag{55}$$

Dabei bedeutet $\sum'$, daß der Summand mit $x(\tau_\lambda) = x(z)$ ausgelassen wird, sofern er in der Summe vorkommt. Auf Grund dieser Festlegung sind die m- und n-Werte gewissermaßen Korrekturwerte, die die Anwendung von (53) auch dann noch ermöglichen, wenn der Abstand des Punktes z von der Skelettlinie kleiner ist als $0{,}4\, l_j$. Die Fehler, die durch Vernachlässigung der Skelettlinienkrümmung entstehen, bleiben dadurch hinreichend klein. In Abhängigkeit von h/l_j (Abb. 6) und τ_r sind diese m- und n-Werte in den Tabellen 2 bis 5 für die vorgegebenen Verteilungen ($r = 1; 2; \ldots \varkappa$) angegeben. Dabei ist τ_r nach (18) bis (21) durch τ bestimmt und $\tau = x(z)/3\, l_j$ nach (13).

Für eine Einzelverteilung auf der Skelettlinie $z(\tau)$ ergibt sich mit diesen m- und n-Werten und ψ nach Abb. 5

$$\left.\begin{aligned} \mu_{Er} &= \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10'} \dot{\mu}_E\,(z - z[\tau_\lambda]) + \frac{l}{3\, l_j}\,(m_r \cos\psi - n_r \sin\psi)\,, \\ \nu_{Er} &= \frac{1}{10} \sum_{\lambda=1}^{10'} \dot{\nu}_E\,(z - z[\tau_\lambda]) - \frac{l}{3\, l_j}\,(m_r \sin\psi + n_r \cos\psi)\,. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Für das Restgitter können die Werte μ_{Rr} und ν_{Rr} auch für Punkte z mit $h \leqq 0{,}4\, l_j$ nach (53) bestimmt werden, da der Abstand von den Belegungslinien des Restgitters genügend groß bleibt. So ergibt sich für die Werte μ_r und ν_r des Gitters gemäß (11c)

$$\mu_r = \mu_{Rr} + \mu_{Er}\, t/l\,, \qquad \nu_r = \nu_{Rr} + \nu_{Er}\, t/l\,. \tag{57}$$

Hiermit wurden aus (25) die Gleichungen (26) und (27) aufgestellt.

(Eingegangen am 7. Dezember 1959.)

Anschrift des Verfassers: *Wolfgang Richter*, c/o CERN-PS, Genf 23.

Statik der Pfahlwerke

Von Dr.-Ing. habil. FRIEDRICH SCHIEL,
Professor an der Escola de Engenharia São Carlos da Universidade de São Paulo

Mit 71 Abbildungen. VIII, 148 Seiten Gr.-8°. 1960.
Ganzleinen DM 28,50

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Das allgemeine Pfahlwerk: Aufgabenstellung. Erklärung und Bezeichnung der Grundgrößen. Gleichgewichtsbedingungen; Pfahlkräfte. Matrizenschreibweise. Einflußvektoren. Zahlenbeispiel · Transformation des Bezugssystems: Aufstellung der Transformationsmatrix. Elastische Achsen. Degenerierte Pfahlwerke. Transformation zerfallener Matrizen · Das nichtallgemeine Pfahlwerk: Pfahlwerk mit parallelen Pfählen. Ebenes Pfahlwerk. Pfahlwerk mit einer Symmetrieebene. Pfahlwerk mit zwei Symmetrieebenen. Ersatzpfähle für Pfahlgruppen. Fiktive Pfähle nach ASPLUND · Eingespannte Pfähle: Allgemeines. Der Einzelpfahl. Allgemeines Berechnungsverfahren. Vereinfachungen in Sonderfällen · Nichtelastische Pfahlwerksberechnung · Knickung von Pfahlwerken: Der Einzelpfahl. Das Pfahlwerk mit parallelen Pfählen. Das Pfahlwerk mit beliebigen Pfählen · Entwurf von Pfahlwerken: Allgemeines. Der wirtschaftliche Pfahlbock. Ebene Pfahlwerke. Pfahlwerke mit wenig Pfählen · Trigonometrische Tafeln · Literatur- und Sachverzeichnis.

Elementare Schalenstatik

Von Dr.-Ing. habil. ALF PFLÜGER,
Professor an der Technischen Hochschule Hannover

Dritte Auflage. Mit 56 Abbildungen. VIII, 112 Seiten Gr.-8°. 1960.
Ganzleinen DM 19,50

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung: Allgemeines. Rechnungsgrundlagen · Membrantheorie der Rotationsschalen: Geometrie der Rotationsschalen. Rotationsschalen im Kuppelbau. Rotationsschalen im Behälterbau · Biegetheorie der drehsymmetrisch belasteten Rotationsschalen: Gleichgewicht am Schalenelement. Elastizitätsgesetz für die Schnittgrößen. Kreiszylinderschale. Näherungslösung für beliebige Rotationsschalen · Membrantheorie der Zylinderschalen: Kreiszylinderschale mit waagerechter Achse unter Eigengewicht. Zylinderschalen allgemeiner Form · Membrantheorie allgemeiner Schalen: Bezeichnungen und geometrische Beziehungen. Gleichgewichtsbedingungen. Differentialgleichung. Hyperbolische Paraboloidschale unter Schneedruck · Einzelheiten des Spannungszustandes: Berechnung der Spannungen aus den Schnittgrößen. Abhängigkeit des Spannungszustandes von der Schnittrichtung · Anhang: Schrifttumshinweise. Zusammenstellung von Lösungen der Membrantheorie · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Soeben erschien:

Stresses in Shells

By Dr.-Ing. WILHELM FLÜGGE,

Professor of Engineering Mechanics, Stanford University

Mit 244 Abbildungen. XII, 499 Seiten Gr.-8°. 1960. (In englischer Sprache)

Ganzleinen DM 58,80

CONTENTS

General Properties of Stress Systems in Shells: Definitions. Membrane Forces in Arbitrary Directions. Transformation of Moments · Direct Stresses in Shells of Revolution: General Differential Equations. Loads Having Axial Symmetry. Shells of Constant Strength. Loads without Axial Symmetry. Deformations · Direct Stresses in Cylindrical Shells: Statically Determinate Problems. Deformations. Statically Indeterminate Structures. Polygonal Domes. Folded Structures · Direct Stresses in Shells of Arbitrary Shape: Conditions of Equilibrium. Elliptic Problems. Hyperbolic Problems. Membrane Forces in Affine Shells · Bending of Circular Cylindrical Shells: Differential Equations. Solution of the Inhomogeneous Problem. Loads Applied to the Edges x = const. Loads Applied to the Edges ∅ = const. Cylindrical Tanks and Related Problems. Anisotropic Shells. Folded Structures · Bending Stresses in Shells of Revolution: Differential Equations. Axially Symmetric Loads. Solution for the Higher Harmonics · Buckling of Shells: Introduction. Cylindrical Shell. Spherical Shell · Appendix: Forces and Deformations in Circular Rings · Bibliography · Index.

ZUR INFORMATION

Dieses Buch ist von einem Ingenieur und für Ingenieure geschrieben. Es enthält eine einheitliche Darstellung der Grundlagen der Schalentheorie, die dem Forscher auf diesem Gebiete einen Ausgangspunkt für sein eigenes Werk geben soll, und es gibt die Lösungen vieler Schalenprobleme in solcher Ausführlichkeit, daß sie ohne zusätzliche Forschungsarbeit auf technische Tagesfragen angewandt werden können. Der Gegenstand dieses Buches ist wesentlich mathematisch; es ist jedoch darauf geachtet worden, daß die benutzten mathematischen Hilfsmittel nirgends über den zur Erreichung des Zieles nötigen Umfang hinausgehen. Vertrautheit mit linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen ist für das Verständnis des Buches unerläßlich. In einigen Teilen wird von den Grundbegriffen der Theorie partieller Differentialgleichungen Gebrauch gemacht.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag • Berlin/Göttingen/Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6